Universidad de Alcalá
COMISIÓN DE ESTUDIOS OFICIALES
DE POSGRADO Y DOCTORADO

ACTA DE EVALUACIÓN DE LA TESIS DOCTORAL

Año académico 2017/18

DOCTORANDO: **FRAILE REY, ARANTZAZU**
D.N.I./PASAPORTE: ******163W**

PROGRAMA DE DOCTORADO: **D433-EDUCACIÓN**
DPTO. COORDINADOR DEL PROGRAMA: **CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN**
TITULACIÓN DE DOCTOR EN: **DOCTORA POR LA UNIVERSIDAD DE ALCALÁ**

En el día de hoy 23/02/18, reunido el tribunal de evaluación nombrado por la Comisión de Estudios Oficiales de Posgrado y Doctorado de la Universidad y constituido por los miembros que suscriben la presente Acta, el aspirante defendió su Tesis Doctoral, elaborada bajo la dirección de **PEDRO ANTONIO RAMOS ALONSO // CRISTINA CANABAL GARCÍA.**

Sobre el siguiente tema: *EL DESARROLLO DE ACTITUDES VALIOSAS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN EDUCACIÓN PRIMARIA*

Finalizada la defensa y discusión de la tesis, el tribunal acordó otorgar la CALIFICACIÓN GLOBAL[1] de (**no apto, aprobado, notable** y **sobresaliente**): SOBRESALIENTE

Alcalá de Henares, 23 de Febrero de 2018

EL PRESIDENTE

Fdo.: Alejandro Iborra

EL SECRETARIO

Fdo.: CARLOS DE CASTRO

EL VOCAL

Fdo.: Inma Lizasoain

Con fecha 1 de marzo de 2018 la Comisión Delegada de la Comisión de Estudios Oficiales de Posgrado, a la vista de los votos emitidos de manera anónima por el tribunal que ha juzgado la tesis, resuelve:

- [X] Conceder la Mención de "Cum Laude"
- [ ] No conceder la Mención de "Cum Laude"

La Secretaria de la Comisión Delegada

FIRMA DEL ALUMNO,

Fdo.: Arantzazu Fraile

[1] La calificación podrá ser **"no apto" "aprobado" "notable"** y **"sobresaliente"**. El tribunal podrá otorgar la mención de "cum laude" si la calificación global es de sobresaliente y se emite en tal sentido el voto secreto positivo por unanimidad.

Universidad
de Alcalá
COMISIÓN DE ESTUDIOS OFICIALES
DE POSGRADO Y DOCTORADO

UNIVERSIDAD DE ALCALÁ, PATRIMONIO DE LA HUMANIDAD

En aplicación del art. 14.7 del RD. 99/2011 y el art. 14 del Reglamento de Elaboración, Autorización y Defensa de la Tesis Doctoral, la Comisión Delegada de la Comisión de Estudios Oficiales de Posgrado y Doctorado, en sesión pública de fecha 1 de marzo, procedió al escrutinio de los votos emitidos por los miembros del tribunal de la tesis defendida por *FRAILE REY, ARANTZAZU*, el día 23/02/18, titulada *EL DESARROLLO DE ACTITUDES VALIOSAS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN EDUCACIÓN PRIMARIA*, para determinar, si a la misma, se le concede la mención "cum laude", arrojando como resultado el voto favorable de todos los miembros del tribunal.

Por lo tanto, la Comisión de Estudios Oficiales de Posgrado **resuelve otorgar** a dicha tesis la

MENCIÓN "CUM LAUDE"

Alcalá de Henares, 2 de marzo de 2018
EL PRESIDENTE DE LA COMISIÓN DE ESTUDIOS
OFICIALES DE POSGRADO Y DOCTORADO
(en funciones)

UNIVERSIDAD DE ALCALÁ - COMISIÓN DE ESTUDIOS OFICIALES DE POSGRADO Y DOCTORADO -

Juan Ramón Velasco Pérez

Copia por e-mail a:
Doctorando: FRAILE REY, ARANTZAZU
Secretario del Tribunal: CARLOS DE CASTRO HERNÁNDEZ.
Directores de Tesis: PEDRO ANTONIO RAMOS ALONSO // CRISTINA CANABAL GARCÍA

Universidad de Alcalá

ESCUELA DE DOCTORADO.
Servicio de Estudios Oficiales de Posgrado

DILIGENCIA DE DEPÓSITO DE TESIS.

Comprobado que el expediente académico de D./Dª Arántzazu Fraile Rey reúne los requisitos exigidos para la presentación de la Tesis, de acuerdo a la normativa vigente, y habiendo presentado la misma en formato: ☒ soporte electrónico ☐ impreso en papel, para el depósito de la misma, en el Servicio de Estudios Oficiales de Posgrado, con el nº de páginas: 399 se procede, con fecha de hoy a registrar el depósito de la tesis.

Alcalá de Henares a 30 de noviembre de 2017

UNIVERSIDAD DE ALCALÁ
SERVICIO DE ESTUDIOS OFICIALES DE POSGRADO

PURIFICACIÓN REVIEJO

Fdo. El Funcionario

RESTAURAR IMPRIMIR

Universidad de Alcalá

EL DESARROLLO DE ACTITUDES VALIOSAS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Tesis Doctoral

presentada por

Arántzazu Fraile Rey

Dirigida por

Dra. Cristina Canabal García

Dr. Pedro A. Ramos Alonso

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

Noviembre, 2017

Universidad de Alcalá

DPTO. CC. DE LA EDUCACIÓN
AULARIO MARÍA DE GUZMÁN
San Cirilo s/n
28804 Alcalá de Henares
Telefono (34) 91 8855017
E-,mail: dpto.educacion@uah.es

ACUERDO DE LA COMISIÓN ACADÉMICA DEL PROGRAMA DE DOCTORADO EN EDUCACIÓN DEL DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN SOBRE LA TESIS DOCTORAL PRESENTADA POR DÑA. ARÁNTZAZU FRAILE REY

Título de la Tesis: **"El desarrollo de actitudes valiosas para la resolución de problemas matemáticos en Educación Primaria"**

Programa de Doctorado: D433 "Educación"

Directores de la Tesis: Pedro A. Ramos Alonso
Cristina Canabal García

Como Coordinador del Programa de Doctorado en Educación, hago constar que, en la Reunión de dicha Comisión celebrada el 14 de noviembre de 2017, se acordó informar favorablemente la Tesis Doctoral presentada por Dña. Arántzazu Fraile Rey, dado que reúne los requisitos académicos y administrativos que la normativa establece.

Para que así conste firmo el presente informe a 16 de noviembre de 2017.

El Coordinador del Programa de Doctorado

UNIVERSIDAD DE ALCALÁ
Departamento de Ciencias de la Educación

Fdo.: Alejandro Iborra Cuéllar

Universidad de Alcalá

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
FACULTAD DE EDUCACIÓN
C/ Madrid, nº 1
19001 Guadalajara
Telf. (34) 949 20 97 51/68 (FAX)
E-mail: dpto.educacion@uah.es

DR. PEDRO ANTONIO RAMOS ALONSO, PROFESOR TITULAR DE UNIVERSIDAD DEL DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS Y DRA. CRISTINA CANABAL GARCÍA, PROFESORA CONTRATADA DOCTORA DEL DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN DE LA UNIVERSIDAD DE ALCALÁ, DIRECTORES DE LA TESIS DOCTORAL PRESENTADA POR DÑA. MARÍA ARÁNTZAZU FRAILE REY

HACE CONSTAR:

Que la Tesis Doctoral titulada "El desarrollo de actitudes valiosas para la resolución de problemas matemáticos en educación primaria" elaborada por Dña María Arántzazu Fraile Rey, estudiante del Programa de Doctorado de Educación, se encuentra finalizada y reúne todas las condiciones necesarias para su tramitación y posterior defensa pública ante la correspondiente comisión.

Y para que así conste, firmo la presente
en Alcalá de Henares, a 9 de noviembre de 2017

Pedro A. R. Cristina

UNIVERSIDAD DE ALCALÁ
Departamento de Ciencias de la Educación

DIRECTORES DE LA TESIS DOCTORAL

«No hay duda alguna de que todo nuestro conocimiento comienza con la experiencia».

(Kant, Crítica de la Razón Pura, p. 41)

«We do not learn from experience...we learn from reflecting on experience».

(Aforismo atribuido a John Dewey)

A Marta, Paula, Pedro y Jako

Agradecimientos

Son muchas las personas que me han acompañado y animado durante este viaje y han hecho posible que esta tesis se haya escrito.

En primer lugar, por supuesto, sus directores. Sin la confianza, el trabajo y las grandes dosis de paciencia que Pedro Ramos has puesto en este proyecto, no habríamos llegado hasta aquí. Sé que a menudo no te lo he puesto fácil, y eso hace que mi gratitud y mi respeto hacia ti sean aún mayores. A Cristina Canabal, que me has ayudado en la elaboración de ideas abordándolas desde distintos puntos de vista, gracias por tu apoyo, por el rigor de tus revisiones y tu cariño.

Gracias a todas y cada una de las maestras de las aulas y a los equipos directivos de los CEIP San Blas en Cabanillas del Campo (Guadalajara), Campiña Verde en Alovera (Guadalajara), Cardenal Mendoza en Guadalajara y Luis Vives en Alcalá de Henares (Madrid). No es fácil dejar entrar a un extraño en tu *casa*, haciéndome además sentir como en la mía propia, percibiendo cada vez que regreso la misma sensación y vuestra disposición a seguir cooperando conmigo.

Gracias especialmente a los niños de estos centros educativos, sin ellos y sus ganas de aprender, de indagar y de jugar, esta tesis no habría sido posible.

Mi gratitud y reconocimiento especialmente a Lourdes de Pedro, que no solo me has acogido en tus aulas, sino que has hecho horas extraescolares para ayudarme a recopilar y procesar tanta información, pasar test y pruebas y conocer un poco mejor a cada uno de los niños. A Esther Rivas y Victoria Sardinero, vosotras fuisteis las primeras en invitarme a vuestras aulas, sin ellas ni el programa piloto, germen de esta aventura, ni este estudio habrían podido llegar a buen puerto.

A Nacho Fernández, ¡mil gracias! por estar siempre pendiente, por tu pasión por la ortografía y tu ayuda en la corrección y revisión de este informe que han hecho que este texto sea un poco mejor.

Mi agradecimiento va también para mis compañeros del Decanato de la Facultad de Educación de la Universidad de Alcalá, y muy especialmente para Amelia Calonge, que has estado atenta a cualquier síntoma de desánimo para inyectarme confianza, y a María Teresa Rodríguez, la más crítica y aguda de cuantas personas han revisado y seguido este estudio, sin duda es mucho más claro y mejor gracias a ti.

Gracias Blanca Arteaga, por tu bolígrafo rojo de tinta infinita, por la paciencia derrochada revisando citas y referencias.

A Marian Sáenz, gracias por tu paciencia, cariño, confianza y apoyo.

A mi familia, gracias por estar ahí tanto tiempo aunque yo con frecuencia no estuviera.

Índice general

Índice de figuras

Índice de tablas

Capítulo 1

Planteamiento del problema. Antecedentes y objetivos. Marco teórico y marco metodológico

1. Presentación

El trabajo de investigación que presentamos tiene por título «El desarrollo de actitudes valiosas para la resolución de problemas matemáticos en Educación Primaria». Este estudio se sitúa dentro del campo de la investigación en resolución de problemas, campo que es un medio y un fin en sí mismo y que acumula una gran cantidad de estudios desde muy distintas perspectivas (Castro-Martínez, 2008; Liljedahl, Santos-Trigo, Malaspina y Bruder, 2016).

Como veremos a lo largo de este capítulo, la investigación en el campo de la educación matemática y, en particular, en la resolución de problemas, ha puesto de relieve la gran cantidad de factores de carácter cognitivo y afectivo que han de considerarse a la hora de ayudar a los alumnos a desarrollar y mejorar sus procesos de pensamiento. El éxito y el fracaso en matemáticas dependen no solo del conocimiento matemático (hechos, algoritmos, procedimientos, etc.) sino también de las decisiones y estrategias relativas al análisis de la tarea matemática a abordar, la planificación de las acciones, el control de las actitudes y los sentimientos al trabajar en matemáticas, etc.

Para enmarcar nuestro trabajo será necesario que establezcamos con claridad qué entendemos por actitudes valiosas en la resolución de problemas, qué entendemos por problema y en qué marco y con qué fines trabajamos la resolución de problemas, así como diferenciar nítidamente los conceptos de actitud hacia las matemáticas y actitud matemática. Necesitamos, por tanto, definir con claridad el ámbito tanto cognitivo como afectivo en el que vamos a desarrollar este estudio, que tiene como ya veremos un carácter marcadamente cognitivo. Este es el cometido de este primer capítulo.

A modo de breve introducción empezamos por los aspectos actitudinales. La actitud se define como la disposición de ánimo manifestada de algún modo y que determina las intenciones personales e influye en el comportamiento. Las actitudes tienen un componente cognitivo que se manifiesta en las creencias que subyacen a dicha actitud, un componente afectivo que se manifiesta en los sentimientos de aceptación o de rechazo a la tarea o la materia y un componente de tendencia a un cierto tipo de comportamiento (Serrano, 1989, citado por Callejo, 1994)

Cuando se trata de las Matemáticas se distinguen dos categorías (Callejo, 1994; Gómez-Chacón, 2009; NCTM[1], 1991): las actitudes hacia las Matemáticas que se refieren a la valoración y el aprecio hacia la disciplina y las actitudes matemáticas que se refieren al modo en que se hace uso de capacidades generales como la flexibilidad de pensamiento, el espíritu crítico, la objetividad, etc. En este trabajo nos centraremos en diseñar, desarrollar y evaluar una intervención para alumnos[2]de 3.º y 4.º de Educación Primaria cuyo objetivo es desarrollar actitudes matemáticas y actitudes hacia la materia a través de la resolución de problemas. No vamos a analizar exhaustivamente las dificultades matemáticas con las que se encuentran los alumnos pero sí vamos a determinar cuáles son y en qué medida constituyen obstáculos para la adquisición por parte del alumno de las destrezas matemáticas. Las matemáticas requieren para su comprensión y aplicación de cierto esfuerzo cognitivo de orden superior. Desde nuestro punto de vista, es necesaria una instrucción diseñada y planificada para desarrollar esta capacidad de esfuerzo y favorecer su asimilación, y de aquí deriva nuestra convicción sobre la importancia de considerar una instrucción matemática que tenga en cuenta las actitudes matemáticas con su dimensión

[1]National Council of Teachers of Mathematics. Organización fundada en 1920, se presenta como la mayor organización profesional internacional comprometida con la excelencia de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para todos los estudiantes.

[2]En este trabajo usaremos el masculino genérico para el plural, siguiendo las recomendaciones de la RAE. Consulta realizada por última vez en marzo de 2017 (http://www.rae.es/consultas/los-ciudadanos-y-las-ciudadanas-los-ninos-y-las-ninas y http://lema.rae.es/dpd/srv/search?id=Tr5x8MFOuD6DVTlDBg y https://www.uv.es/ivorra/documentos/RAE.html).

cognitiva y afectiva y su relevancia sobre nuestros procesos mentales cuando resolvemos problemas.

Por otro lado, el análisis de los trabajos sobre resolución de problemas nos enfrenta a diferentes significados del término «problema» y por tanto a diferentes aproximaciones desde el campo de la investigación. Tendremos que definir en qué paradigma nos centramos. Estas son algunas de las posibilidades:

- Enseñar para resolver problemas: desde este enfoque los problemas y la resolución de problemas se presentan desde un punto de vista funcional, como aplicación de unos conocimientos matemáticos previamente estudiados.

- Enseñar a resolver problemas: la resolución de problemas se aborda como un contenido que se trabaja con el objetivo de que los alumnos aprendan a resolver problemas. Se facilita a los alumnos formación en técnicas heurísticas, se busca el desarrollo de habilidades y el fomento de determinadas actitudes que se consideran imprescindibles en la resolución eficaz de problemas.

- Y por último, la enseñanza basada en resolución de problemas (*teaching based problem*), enfoque metodológico en el que a partir de una situación problemática se trabajan determinados temas y conceptos matemáticos.

Este trabajo se enmarca en el segundo de estos aspectos, la resolución de problemas como un contenido y una actividad (Blanco y Cárdenas, 2013; Puig, 2008; Schroeder y Lester, 1989; Lester, 1989; Schoenfeld, 1985, 2007). Trabajaremos la componente afectiva hacia la materia (interés por su aprendizaje) a través del desarrollo de actitudes matemáticas (flexibilidad de pensamiento, constancia, espíritu crítico, objetividad, etc.).

La investigación explora el proceso de aprendizaje de la resolución de problemas desde un enfoque cognitivo centrado en el desarrollo de las estrategias de resolución y las habilidades comunicativas de los niños sobre su trabajo cuando hacen matemáticas. Motivados por el propósito de experimentar de primera mano el aprendizaje y razonamiento de los alumnos, hemos seguido la metodología del paradigma de investigación de diseño dirigida por una conjetura (Confrey y Lachance, 2000, 2012; Molina, 2006).

El planteamiento inicial de investigación parecía conducirnos a una tarea de observación y análisis de los niños durante las sesiones de resolución de problemas con el objetivo de identificar y categorizar las actividades y comportamientos que pudieran percibirse como influyentes o determinantes en el desarrollo de la resiliencia y constancia de los alumnos. Finalmente, el trabajo en el aula y el marco metodológico empleado nos han llevado a plantear una intervención para valorar su eficacia.

A lo largo de los cursos académicos 2013-2014 a 2016-2017 de forma fija-discontinua[3] hemos trabajado la resolución de problemas con aulas de 1.º a 6.º de Educación Primaria; el material recopilado es amplio y además de los resultados obtenidos en la investigación existen varias líneas de trabajo que nos planteamos desarrollar en el futuro. En este informe nos centramos en el trabajo realizado con un mismo grupo de alumnos a lo largo de dos cursos académicos, los transcurridos de 2014 a 2016, y en los que ellos han cursado 3.º y 4.º de Educación Primaria.

La resolución de problemas plantea serias dificultades a lo largo de todas las etapas educativas, y es ya desde los primeros años de Educación Primaria cuando comienzan a percibirse las dificultades que dan motivo a este trabajo.

En este primer capítulo justificamos el interés del campo de estudio a partir de una breve reseña sobre la investigación en resolución de problemas. Además, revisaremos los marcos curriculares (nacionales e internacionales) en los aspectos relacionados con la resolución de problemas. Describimos el marco metodológico empleado, su origen y evolución, y las características principales que permiten evaluarlo como el más adecuado para el diseño y análisis de esta investigación. Concluiremos con la justificación de la pertinencia de este estudio, las características concretas y la formulación de la conjetura de trabajo que guía esta investigación.

En el capítulo 2 comenzaremos diagnosticando la situación en lo referente a resolución de problemas en aulas de 4.º y 5.º de Educación Primaria a partir de la prueba estandarizada TIMSS 2011[4]. Analizamos las habilidades, estrategias (exitosas o no) y errores en las respuestas de un total de 198 alumnos (111 de cuarto curso y 87 de quinto). No estamos interesados en los procesos de evaluación sino en establecer un patrón de dificultades y obstáculos con los que se encuentran los alumnos al responder a estas preguntas; un buen diagnóstico y conocimiento profundo sobre la lógica que subyace a estos errores nos permitirá diseñar una mejor intervención en el aula.

[3]Las sesiones de intervención se han adaptado en todo momento a las programaciones del centro, a las aulas donde ha tenido lugar la intervención y al calendario laboral de la investigadora.

[4]El estudio internacional de tendencias en matemáticas y ciencias conocido por sus siglas en inglés como TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) es un estudio de la Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento Educativo (IEA).

En el capítulo 3 se presentan las sesiones de intervención y se analizan los datos recogidos a lo largo de la investigación en las aulas de 3.º de Educación Primaria.

El capítulo 4 recoge las sesiones, los datos y sus análisis en las aulas de 4.º de Educación Primaria. Y por último, el capítulo 5, donde se recogen las conclusiones del estudio y el modo en el que se ha dado respuesta a las preguntas que han ido surgiendo a lo largo de la intervención. Además, se analizan las limitaciones de la intervención y se presentan las principales cuestiones abiertas y líneas de investigación identificadas.

2. Contexto y marco teórico

La resolución de problemas es el quehacer esencial de la actividad científica y también la actividad cognitiva más significativa tanto en el entorno profesional como en el personal (Jonassen, 2000). El objetivo último de la educación es enseñar a las personas a pensar, a utilizar sus capacidades de razonamiento y a convertirse en personas competentes a la hora de resolver problemas[5] (Gagné, 1980; citado por Jonassen, 2000). En cada disciplina científica esta tarea se aborda desde distintas perspectivas y por ello nos encontramos con una amplia variedad de aproximaciones a su definición y alcance (Schoenfled, 1992). Para las Ciencias de la Educación la resolución de problemas es importante no solo como materia de enseñanza-aprendizaje sino como tema de investigación:

> «la enseñanza en las ramas de ciencia tiene generalmente como fin alcanzar dos objetivos: la adquisición de un cuerpo de conocimiento organizado en un dominio particular y la habilidad para resolver problemas en ese dominio». (Heyworth, 1999, citado en Castro-Martínez, 2008, p. 195)

En el ámbito de la educación matemática, la resolución de problemas está universalmente reconocida como la base de una formación matemática de calidad. Pero las dificultades de los alumnos al enfrentarse a estas tareas son tan diversas y están tan extendidas que parece natural y necesario desarrollar una teoría bien articulada sobre la resolución de problemas.

[5] No encontramos en castellano una traducción establecida para «*problem solvers*»; en este texto utilizaremos la expresión «*resolutores de problemas*».

La bibliografía sobre el tema es muy extensa, y en cierto modo dispersa[6]. Parece que no se ha llegado a establecer una teoría consistente para la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas en el ámbito escolar (Jonassen, 2004, p. 63):

> «el problema parece estar estudiado, pero es escaso el esfuerzo empleado en articular un modelo de resolución de problemas, e incluso se percibe un desinterés en ayudar a los estudiantes a aprender a resolver problemas».

Aunque quizás esto sea debido, como él mismo explica, a las dificultades de la tarea:

> «¿Por qué somos tan ineptos a la hora de involucrar a los estudiantes en la resolución de problemas? Desde mi punto de vista, la principal razón es que no entendemos suficientemente bien la amplitud de las tareas de resolución de problemas, y por ello no somos capaces de dar a los estudiantes el apoyo suficiente en la actividad. La resolución de problemas nunca ha sido suficientemente reconocida ni tratada en la literatura docente».

Esta visión, un tanto derrotista, nos resulta explicable en tanto en cuanto no hay una teoría establecida sobre cómo proceder, mientras se observa que los resultados de la educación matemática en un número considerable de países, y en el nuestro en particular, no se corresponden con los esperables en términos de desarrollo socioeconómico.

El estudio de la bibliografía nos muestra aproximaciones al tema desde dos realidades muy diferentes: la de los investigadores en educación, conformada por los profesionales de distintas ramas del conocimiento como matemáticos, psicólogos, estudiosos de diversas disciplinas interesados en los procesos de enseñanza-aprendizaje y, por otro lado, la conformada por los docentes, preocupados por cómo desarrollar el currículo, cómo y qué hacer para enseñar a resolver problemas. Entre unos y otros parece haber escasas conexiones.

Los trabajos de investigación en el área se centraron inicialmente en la determinación de los factores propios del proceso y en el estudio de las características de los sujetos involucrados en la tarea. Estos primeros trabajos se ocuparon de los «buenos resolutores de problemas», el estudio de «buenos problemas» y su planteamiento, la enseñanza-aprendizaje

[6]Esta es una afirmación que hemos encontrado en diferentes autores a lo largo del estudio: Schoenfeld (1992, p. 334): «the literature on problem solving is somewhat ill defined and poorly grounded»; Jonassen (2000, p. 63): «Problem solving has never been sufficiently acknowledged or articulated in the instructional design literature».

de heurísticas para resolver problemas, etc. Estudios posteriores han derivado hacia el análisis de los factores de carácter ambiental y metacognitivos. Las líneas más recientes versan sobre la resolución de problemas y las TIC. Estos trabajos se discuten y publicitan periódicamente en conferencias internacionales como el ICME[7], NCTM ...[8]

Se está dando también un tenue acercamiento de la práctica a la investigación como herramienta de mejora del docente a través de la iniciación en la investigación en el aula bajo el paraguas de la metodología del «la investigación hecha por el profesorado».

A esta separación entre teoría y práctica contribuyen además la gama de diferentes significados que se le otorgan a las expresiones «problema» y «resolución de problemas», y el papel que se les asigna en los sucesivos currículos[9]fruto de «los continuos movimientos pendulares de las políticas educativas»[10].

«A lo largo de los últimos cincuenta años se han venido sucediendo una serie de cambios en el currículo matemático escolar y a algunos de ellos se les puede dar el calificativo de "dramáticos"» (Schoenfeld, 1992, p. 336). Estos cambios responden a los condicionantes sociopolíticos e ideológicos y en contadas ocasiones surgen como respuesta estudiada a las necesidades de mejora de los sistemas educativos.

Tras la segunda guerra mundial se percibe en occidente, en particular en los EE. UU., la necesidad de acercar la enseñanza de las Matemáticas a las Ciencias Matemáticas. Las Matemáticas como ciencia habían empezado a estructurarse y desarrollarse como tal en las postrimerías del s. XIX y como consecuencia de ello se estaba produciendo un dis-

[7]International Congress on Mathematical Eduction.

[8]Grouws (1992, p. 9) hace notar en el prefacio del «Handbook of research on mathematics teaching and learning» que los capítulos del manual no están escritos pensando en los diseñadores del currículo, coordinadores de centros ni órganos de decisión de las políticas educativas, pero sí sería conveniente que estos accedieran a ellos. Consideramos que debería ser así y tanto las producciones de los primeros como los trabajos de los segundos deberían ser conocidos por estos colectivos.

[9]Schoenfeld (1992, cap. 15, p. 337) afirma que la literatura sobre resolución de problemas de matemáticas es difícil de interpretar porque "problema" y "resolución de problemas" tienen y han tenido significados variados y, en ocasiones, contradictorios. Por tanto, en todo trabajo sobre resolución de problemas es aconsejable especificar el significado de estos términos.

[10]Voskoglou, 2012, (citando a Vestappen, 1988) y Galbraith, (1988), concluyen que en Matemáticas se da un movimiento continuo entre dos corrientes filosóficas: los formalistas y los intuitivos; como consecuencia de este movimiento estima que cada quince años tienen lugar cambios sustanciales en la educación matemática.

tanciamiento importante entre estas y las matemáticas escolares[11]. Con el propósito de reducir esta brecha y forzados los países occidentales por los acontecimientos sociopolíticos, en particular los Estados Unidos[12], en los años 60 llega a los currículos escolares la «Matemática Moderna» (New Mathematics). Las críticas a este nuevo currículo y sus consecuencias no tardaron en llegar pues la reforma no estaba funcionando tal y como se esperaba:

> «Desde el punto de vista de la enseñanza de la materia, los matemáticos profesionales son la amenaza más seria para la supervivencia de las matemáticas [...] Algunos defensores de este nuevo currículo ignoran completamente el hecho de el aprendizaje de las matemáticas es un hecho acumulativo y que es prácticamente imposible aprender nuevos hechos y conceptos, si no se conocen los más antiguos». (Kline, 1973, p. 17)
>
> «La percepción generalizada fue que los estudiantes no solo habían fracasado en la comprensión de las ideas abstractas (que era el objetivo de la reforma)..., sino que tampoco habían conseguido dominar las habilidades básicas que las generaciones que les precedieron en las escuelas habían conseguido aprender». (Schoenfeld, 1992 p. 336)

Al hablar sobre la tendencia a la abstracción en las «Nuevas Matemáticas», Kline (1973, p. 98) recuerda que «en un desarrollo matemático la abstracción matemática no es la etapa de partida sino la de llegada».

Sin haber dado, en general, otra respuesta a esta reforma que eliminar la teoría de conjuntos de los currículos, a lo largo de los años 80 aparecen las voces que reclaman «los problemas» como motivo y herramienta para enseñar y entender mejor las matemáticas. Publicaciones como el «Mathematics counts, the Cockcroft Report» (1982) o las del NCTM (1980 y 1989) señalan la resolución de problemas como un contenido central en la

---

[11] ¿Cómo reducir la brecha entre investigación y práctica docente? Sigue siendo un tema de estudio en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y las ciencias en general (este es el título de una de las conferencias plenarias del X Congreso Internacional en la Enseñanza de las Ciencias - Sevilla, septiembre de 2017).

[12] El 4 de octubre de 1957 los soviéticos lanzan el Sputnik, el primer satélite artificial de la historia.

enseñanza y aprendizaje de las matemáticas[13].

Por ello la resolución de problemas (*RP* o *PS* según sus siglas en inglés *Problem-solving*) se convierte en el principal componente de la educación matemática y llega incluso a ser el eje vertebrador de algunos currículos escolares. En las versiones más recientes del currículo español (Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, LOE y la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa, LOMCE) se proponen los procesos de resolución de problemas como eje principal de la actividad matemática pero lo que no figuran son indicaciones explícitas sobre qué se entiende por RP, ni cómo abordar y planificar esta tarea. Es por esto que en la práctica las interpretaciones pueden diferir completamente de un centro a otro y que esta actividad haya quedado relegada a trabajar los epígrafes planteados en los libros de texto como «problema» según unas sencillas pautas «Datos-Operaciones-Resultado».

La noción de «problema» desde el punto de vista de los expertos dista mucho de la que subyace en los libros de texto y va más allá de una tarea que viene acompañada de un enunciado o de la recopilación de ejercicios que aparece en el «bloque de problemas» al final de cada capítulo del libro de texto y que presentan una gran similitud con los que ya se han ido trabajando en cada epígrafe de la lección.

> «Lo que parece estar fuera de toda duda es que resolver problemas va más allá de hacer una operación y encontrar su resultado, es algo más que ejecutar un algoritmo, tiene que ver más con hacer preguntas relacionadas con la matematización de un problema real, o bien con la construcción de nuevos objetos matemáticos para responder a esas preguntas». (Chamorro y Vecino, 2011, p. 275)

A lo largo del apartado siguiente vamos a hacer una revisión sobre la variedad de significados planteados en el área para los términos «problema» y «resolución de problemas».

[13] La Agenda para la Acción del NCTM de 1980 fija la resolución de problemas como el objetivo principal de las matemáticas escolares. En el ICME-IV, California (1980), solo tuvo lugar una sesión dedicada a resolución de problemas, y esta estaba etiquetada en el apartado «aspectos inusuales del currículo». En la edición más reciente ICME-13, Hamburgo (2016), la resolución de problemas (Grupo de trabajo n.º 19, TSG-19 por sus siglas en inglés) contemplaba 14 subáreas, cifra que da una idea de la importancia que se le confiere a este tema en la actualidad.

2.1. Sobre problemas y la resolución de problemas: definiciones conflictivas[14]

> «Aunque los problemas han ocupado un lugar central en las matemáticas escolares desde la antigüedad, la resolución de problemas no lo ha hecho. La idea de que el desarrollo de la capadidad de resolver problemas requiere atención especial ha sido aceptada por los educadores solo recientemente. Las palabras "resolución de problemas" se han convertido en una etiqueta para describir diferentes visiones de qué es la educación, qué es el sistema escolar, qué son las matemáticas, y por qué deberíamos enseñar matemáticas, en general, y resolución de problemas, en particular». (Stanic and Kilpatric, 1988, citado por Schoenfeld, 1992, p. 337)

Existe un grado de imprecisión entre los profesionales acerca de la definición de problema, y qué se entiende por resolución de problemas, y por tanto sobre la justificación de por qué hay que trabajarlos; como señala Puig (1996, p. 19), «la variedad de significados es ineludible y los responsables son la variedad de disciplinas, de ámbitos y los puntos de vista que lo estudian[15]».

El DRAE (2015) recoge cinco entradas para el término problema[16]; para nuestro contexto son relevantes tres de ellas y las dos formas compuestas que listamos:

[14]«On problems and problem solving: conficting definition», tomamos prestado el título del apartado homónimo de Schoenfeld (1992).

[15]Puig indica que en los trabajos que se suceden a lo largo de la década de los 80 (Hill (s. f.), Lester (1980), Lester y Garofalo, eds. (1982), Silver, ed. (1985), Charles y Silver, eds. (1989)) se señala la dificultad de delimitar «problema» y «resolución de problemas». Esta afirmación surge como resultado de la búsqueda bibliográfica sistemática que hace Hill para el proyecto descrito en Burton (s. f.) llegando a la conclusión de que es necesario hacer un catálogo de definiciones de problema. De igual manera el trabajo de Goldin incluido en Lester y Garofalo, eds. (1982), estudia las definiciones de problemas que surgen desde la perspectiva del estudio de los productos del proceso de resolución; mientras que Stanic y Kilpatrick incluido en Charles y Silver, eds. (1989), lo que examinan es un conjunto de tareas de resolución de problemas planteadas en libros de texto desde finales del siglo XIX hasta los 90.

[16]Consulta realizada el 3 de diciembre en http://dle.rae.es/. Versión electrónica de la 23.ª edición del «Diccionario de la lengua española. Edición del Tricentenario

1. Cuestión que se trata de aclarar.

2. Proposición o dificultad de solución dudosa.

5. Planteamiento de una situación cuya respuesta desconocida debe obtenerse a través de métodos científicos.

   Y las formas complejas:

- problema determinado: Mat. problema que no puede tener sino una solución, o más de una en número fijo.

- problema indeterminado: Mat. problema que puede tener indefinido número de soluciones.

Están en línea con las recogidas por el diccionario Merriam-Webster (2016)[17]:

> 1a: question raised for inquiry, consideration, or solution.
> 1b: a proposition in mathematics or physics stating something to be done.
> 2a: an intricate unsettled question.
> 2b: a source of perplexity, distress, or vexation.

Desde el punto de vista matemático esta definición no nos parece la más adecuada, un problema matemático no se caracteriza por «ser una proposición de solución dudosa». Aclararemos de entrada que no es nuestra intención definir taxativamente qué es un problema, sino analizar algunos de los usos establecidos para el término y en particular para los problemas no estándar sobre los que trabajaremos en esta investigación, así como acotar el concepto y el significado del término. Cumplimos así con las recomendaciones de Schoenfeld al delimitar el sentido en que emplearemos este término.

La definición aportada por los diccionarios se centra en *la tarea* en sí misma, en línea con la definición clásica recogida por Puig (1996):

> «en los problemas de matemáticas hay que hacer algo con los objetos matemáticos que aparecen en ellos —una construcción con figuras, un cálculo con números, etc.— y el procedimiento con el que ese algo se obtenga ha de probarse mediante una agumentación, cuyas reglas están establecidas por un marco discursivo determinado, y propio de la práctica matemática concreta». (Puig, 1996, p. 27)

[17]«Problem.» Merriam-Webster.com. Merriam-Webster, n.d. Web. 18 Feb. 2017.Versión electrónica del The Merriam-Webster Dictionary New Edition (c) 2016

Para Kantowski (1980, p. 195):

> «Un problema es una situación para la que la persona que la afronta no dispone de un procedimiento que garantice la resolución. Para poder resolver el problema, la persona debe combinar el conocimiento relevante de una forma adecuada».

Llegamos entonces a la distinción entre «ejercicios» y «problemas» que es un clásico en la literatura. Para los primeros existe un algoritmo que conduce a la solución mientras que no es así de inmediato para los segundos. Pero esta clasificación no es dicotómica. Según Pehkonen, Näveri y Laine (2013), una tarea será percibida por el individuo como ejercicio (tarea rutinaria o estándar) o problema (tarea no rutinaria) en función de los requisitos que esta le demande para su resolución. Señala además que el término «tarea no rutinaria» es utilizado con frecuencia para referirse a los ejercicios que habitualmente no pueden encontrarse en los libros de texto.

Los matices introducidos por Pehkonen et al. (2013) introducen un nuevo actor: *el sujeto* y las condiciones que este deber reunir cuando afronta la tarea.

> «Ser un "problema" no es una propiedad inherente a una tarea matemática. Más bien es una relación particular entre el individuo y la tarea lo que hace que esta sea considerada un problema para ese individuo. El término problema es usado en términos relativos, como una tarea que es difícil para el individuo que está intentando resolverla. [...] En términos más formales, si uno tiene acceso a un esquema de resolución para una tarea matemática, se trata entonces de un ejercicio y no de un problema». (Schoenfeld, 1985, p. 74)

Hay un elemento más a considerar en la escena, *el contexto y el fin* con que son utilizados los problemas, que aportarán un nuevo matiz a las definiciones. Los fines justifican la necesidad y el valor de trabajar problemas. Stanick y Kilpatric (1989) en su revisión histórica sobre la resolución de problemas citada por Schoenfeld (1992) explican tres visiones diferentes que justifican su uso:

- como un medio para alcanzar los objetivos del currículo,
- como un fin y un proceso necesarios para desarrollar una habilidad,

- la resolución de problemas como el verdadero trabajo matemático, «como un arte», «el corazón de las matemáticas», o las «matemáticas en sí mismas».

La definición recogida por los diccionarios parece estar en línea con el primero de los fines señalado por Stanick y Kilpatric y nos permite entender el contexto en el que los problemas son interpretados tradicionalmente en la enseñanza. Mientras que los matices introducidos por Kantowski y Pehkonen et al. están alineados con el segundo y en cierta medida con el tercer escenario.

Estos puntos de vista se pueden reformular en una lista más extensa de fines y contextos:

- Desarrollar el pensamiento: Platón exigía el conocimiento de la Geometría para ingresar en la Academia. No porque en esta se fueran a aplicar estos conocimientos sino porque su estudio era considerado indispensable para la formación del pensamiento de un filósofo.
- Justificar la importancia de enseñar matemáticas mostrando aplicaciones a situaciones prácticas.
- Utilizar los problemas como elemento motivador y como elemento que proporciona diversión y oportunidades para el desafío personal.
- Introducir contenidos a partir de un «problema tipo», los procesos de enseñanza-aprendizaje a través de los problemas como metodología activa.
- Fijar procedimientos explicados en el aula.
- En respuesta a las «nuevas tendencias curriculares», los estándares del NCTM (1991), el Common Core (2009-2010), LOE (2006) y LOMCE (2013), que presentan las matemáticas como «resolución de problemas».

Nos detenemos un instante en el penúltimo punto. Los libros de texto, amparados en la necesidad de proporcionar prácticas, listan una considerable cantidad de «problemas» que reproducen en su mayoría la misma estructura: para su resolución se requiere de una técnica específica que ha sido presentada con anterioridad y se hace necesario adquirir destreza en ella. Habiendo trabajado un número suficiente de estos ejercicios el alumno incorpora esta nueva técnica a su bagaje matemático. Lo que se espera del alumno es que interiorice este nuevo algoritmo disfrazado bajo la apariencia de problema matemático.

Situación que se adapta a la definición de problema aritmético en la enseñanza primaria que nos proporciona Tomás i Folch:

> «definimos problema aritmético en la enseñanza primaria como una situación imaginaria, susceptible de ser real, planteada en forma de enunciado verbal o escrito que se resuelve mediante alguna(s) de las operaciones elementales». (Tomàs i Folch, 1990, p. 121)

Schoenfeld (1985, p. 28) señala que este tipo de cuestiones cuando van acompañadas de un enunciado que describa situaciones asimilables a una situación real tienen la ventaja de contextualizar las matemáticas y por tanto tienen más relevancia que las tareas puramente numéricas, pero en el fondo son ejercicios del tipo «aplicar un procedimiento» y hay muy poco de «problema» en cada uno de ellos, en particular cuando ya se han hecho docenas de ellos.

Este mismo autor, en un estudio que analiza las clases de matemáticas a lo largo de un curso académico para estudiar las creencias y actitudes de alumnos del décimo año (4.º de la ESO), señala:

> «El lenguaje sobre resolución de problemas se ha extendido a lo largo de las últimas décadas. Hemos escuchado ese lenguaje en las clases que observamos pero la realidad de esas clases es que los auténticos problemas aparecen de forma escasa. [...] La gran mayoría de los problemas que se le plantean a los estudiantes son ejercicios cortos, pensados para dominar un contenido determinado. Las excepciones han sido tareas esporádicas que los estudiantes han encontrado divertidas, pero que son consideradas actividades recreativas, o premios, en lugar de parte central de lo que se espera que aprendan. [...] Los avances en la educación matemática en la [pasada] década han consistido básicamente en nuestra adquisición de una mejor comprensión del objetivo, y en que los estudiantes han adquirido el lenguaje —pero no la sustancia— relacionada con ese objetivo». (Schoenfeld, 1989 pp. 348-9)

Pólya (1945, p. 154; 1962, p. 139) distinguía cuatro tipos de problemas y las fronteras entre unos y otros no parecen muy precisas:

1. Problemas en los que que hay que aplicar una regla que salta a la vista porque acaba de ser presentada. El problema se resuelve por la aplicación mecánica de esta regla.

2. Problemas en los que hay que discernir qué regla se debe aplicar, se precisa de cierto dominio sobre lo ya estudiado.
3. Problemas en los que hay que aplicar dos o más reglas ya estudiadas y hay que elegir entre estas. La dificultad del problema deriva del grado de novedad de la secuencia o combinación de reglas a aplicar.
4. Problemas de investigar, el problema precisa de una nueva combinación de reglas, tiene varias ramificaciones y se hace necesario el razonamiento plausible. En el breve diccionario de la Heurística distingue entre problemas de encontrar (hay una incógnita con datos y condiciones, el objetivo es averiguar la incógnita) y problemas de probar (partiendo de una hipótesis y unas condiciones el objetivo es demostrar si lo afirmado es válido o no).

Parece claro entonces que tal y como apunta Schoenfeld (1985) la categoría en la que se encuadra una determinada tarea no es una propiedad inherente a la tarea matemática, más bien es la relación del resolutor con la tarea lo que hace de esta un problema. Y nos queda por dilucidar hasta qué punto la dificultad ha de ser algorítmica o conceptual. Entendemos que debería tratarse de la segunda, pues de lo contrario estaremos ante ejercicios rutinarios que no deberían convertirse en la forma habitual de trabajar los problemas, pues ello conduciría a una visión de las matemáticas como una disciplina limitada a tareas mecánicas. Esta concepción de las matemáticas conduce a una educación que pone el énfasis en la manipulación de símbolos cuyo significado raramente es comprendido y que podemos sintetizar en la secuencia de enseñanza «*do-as-I-show-you*». El profesor presenta los contenidos, las reglas, el alumno practica para adquirir destreza en el uso de estas reglas y finalmente se le presenta un problema verbal en el que se hace necesario aplicarlas. Pero esta forma de proceder no solo no está contribuyendo a la formación matemática de los alumnos (Pesek y Kirshner, 2000), sino que además parece estar lastrando las posibilidades de acceso al mundo laboral.

Desde la revolución industrial se ha ido intuyendo que los perfiles de formación debían ir cambiando a media que la sociedad iba cambiando. En los últimos años, en una sociedad altamente tecnificada, son muchos los indicadores sobre la evolución del mercado laboral y de los estudios económicos que ponen de manifiesto que la comprensión de los conceptos, la capacidad para interrelacionarlos, y la habilidad para afrontar y resolver problemas complejos en equipo formarán irremediablemente parte de las competencias necesarias para desenvolverse en el mundo laboral. El gráfico de la figura 1.1 muestra la

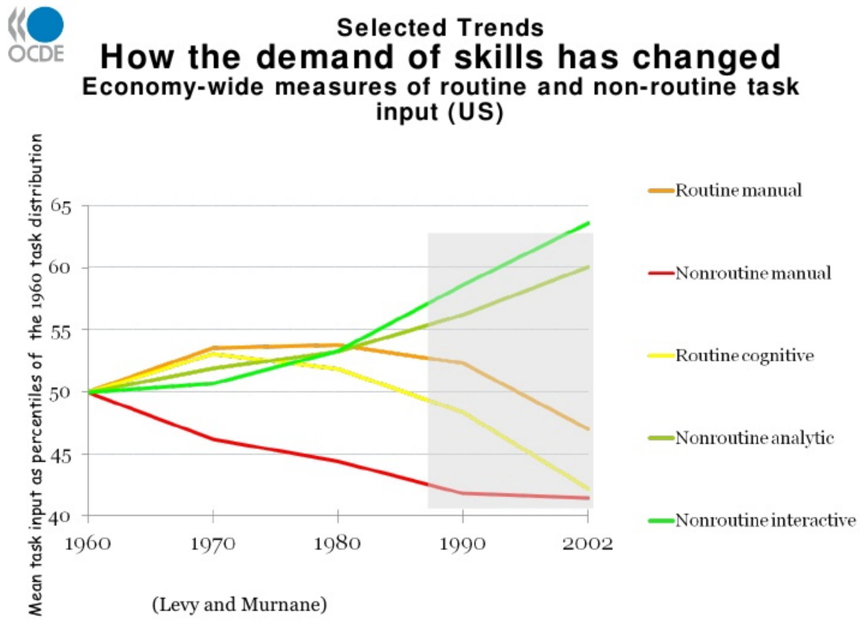


Figura 1.1: Evolución de las habilidades requeridas en el mercado laboral. (Levy y Murnane, 1999)

evolución en la demanda de perfiles en el mercado laboral norteamericano. Para su elaboración se ha tomado como punto de referencia el perfil del trabajador norteamericano en los años 60. La destreza en tareas cognitivas rutinarias (como los cálculos rutinarios y el aprendizaje de los procedimientos entran dentro de esta categoría) ya no aportarán valor diferencial alguno.

En el contexto de esta investigación nos centraremos en problemas aritméticos escolares que supongan un reto intelectual para los alumnos y se adapten a la definición de Puig y Cerdán (1988, p. 5):

> «En la escuela los problemas aritméticos se proponen, se enuncian o se presentan enunciados, y se resuelven [...] En el enunciado, la información que se proporciona tiene carácter cuantitativo ya que los datos suelen ser cantidades; la condición expresa relaciones de tipo cuantitativo y la pregunta se refiere a la determinación de una o varias cantidades, o relaciones entre cantidades. La resolución del problema, o lo que es preciso hacer para contestar la pregunta del problema, fundamentalmente parece consistir en la realización de una o varias operaciones aritméticas».

Nuestros problemas estarán constituidos por una proposición o enunciado escrito en el que se establecerá la escena, los protagonistas y su localización (trabajaremos con niños de 3.º y 4.º curso de Educación Primaria y consideramos importante tanto como elemento motivador como facilitador para entender la situación planteada que los problemas puedan «ponerse en escena», «presentarse a modo de dramatización»), se facilita la información y los datos que se necesitan para resolver el problema (el orden de magnitud de los datos numéricos con los que trabajaremos permitirá a los alumnos estimar el resultado y poner en juego su sentido numérico para contrastar la solución numérica que obtienen) y por último la pregunta para la que hay que obtener una respuesta, «la meta» de Puig y Cerdán.

Consideraremos que son buenos problemas si tal y como proponía Pólya (1965) reúnen las siguientes condiciones:

- Son considerados como un proceso y no solo como unos resultados y en la medida de lo posible permiten el desarrollo de diferentes estrategias de resolución.
- Son interesantes para el alumno. En los problemas que encontramos en este estudio no es tanto el problema en sí mismo lo que motiva al alumno sino el contexto en el que tiene lugar el proceso de resolución. Las situaciones planteadas le permitirán poner en juego sus propios conocimientos, revisarlos, modificarlos o rechazarlos y construir conocimiento nuevo.
- El alumno no percibe de inmediato que la mera aplicación de un algoritmo le permite obtener el resultado de forma directa. Y en caso de que así lo perciba, se ve obligado a revisar el algoritmo utilizado, el resultado obtenido y la búsqueda de otra forma de resolver el problema. A los alumnos con menos dificultades se les pedirá que investiguen otra forma de resolver el problema, que expliquen por qué su procedimiento funciona.
- Los errores, al tratar de corregirlos, se convierten en una fuente de conocimiento.
- Permiten el razonamiento matemático.

Para algunos lectores los problemas propuestos pueden parecer «ejercicios anticipados» en el sentido de que parecen tareas propias de un curso escolar más avanzado. Pero si nuestros alumnos cuentan con el nivel suficiente de motivación para intentar abordar su solución bien solos o bien en colaboración con sus compañeros y la maestra, estaremos en la «zona de desarrollo próximo» que es donde la actividad didáctica adquiere todo su sentido y pueden producirse resultados cognitivos interesantes.

Al igual que el término problema se acota de diferentes formas según los autores considerados, así sucede con el de proceso de «resolución de problemas». En el campo de la investigación esta cuestión ha despertado mucho interés en varios periodos y su presencia y ausencia a lo largo de los currículos escolares es en términos de Puig (2008) «elusiva»: es evitada o esquivada con cierta astucia cada vez que sale al encuentro. En la práctica, cómo resolver problemas, o cómo aprender a resolver problemas, no ha sido considerada tradicionalmente una razón para trabajar los problemas en el aula ya que se asume que esta competencia se adquiere por imitación[18].

En lo que sigue abordamos la cuestión sobre si es posible enseñar/aprender a resolver problemas y, en caso afirmativo, cómo debe hacerse. Consideramos tanto la aproximación desde el campo de la investigación como el tratamiento curricular recibido a lo largo de los últimos treinta años en nuestro entorno más inmediato.

Antes de ello y a modo de síntesis presentamos la tabla 1.1 como resumen sobre los aspectos más destacados en cuanto a la definición de «problema». En esta tabla listamos más autores que los antes referenciados para dar una visión cronológica.

[18] Forma de proceder que se recoge en los trabajos de Pólya, como veremos a continuación.

Tabla 1.1: Síntesis sobre el concepto de problema.

Autor(es)	Aspectos a destacar
Bronwell (1942)	Situación problemática es aquella que causa perplejidad en el individuo. Los sitúa en un continuo entre el «enigma» y una situación familiar comprensible (citado por Puig, 1996, pág. 20).
Rubistein (1965)	En un verdadero problema el sujeto desconoce la vía de resolución y al posicionarse frente al problema mismo adopta un carácter activo (citado por Sigarreta, Rodríguez y Ruesga, 2006).
Carl (1989)	Aplicación de los conceptos previamente adquiridos a situaciones nuevas.
Kantowski (1980, 1981, p. 111)	Situación para la que el resolutor no cuenta con un algoritmo o procedimiento que le conduce de forma más o menos inmediata o con certeza a la solución.
Halmos (1980)	Los problemas son el corazón de las matemáticas.
Heller y Hungate (1985)	La capacidad para dar respuesta a los ejercicios planteados al final de un libro de texto estándar.
Andler (1987)	Hay un problema en la medida que es sentido como tal por el resolutor.
Resnick (1989)	Resolver problemas, en cualquier dominio, es más una cuestión de adquirir los hábitos y disposición necesarios para interpretar y dar sentido que la mera adquisición de un conjunto concreto de habilidades, estrategias o conocimientos.
N.C.T.M (1991)	Hacer matemáticas.
Schoenfeld (1992)	Ser un problema no es una condición inherente a la tarea. Es una relación entre el individuo y esta. Si uno tiene acceso a un esquema de resolución esta tarea es un ejercicio y no un problema.
Puig (1996)	Problema matemático escolar es una tarea de contenido matemático, cuyo enunciado es significativo para el alumno, que éste desea abordar y para la cual no ha producido sentido. Resolver el problema es la actividad mental desplegada por el resolutor desde el momento que asume que lo que tiene delante es un problema, que quiere resolverlo y hasta que da por acabada la tarea.

2.2. Cómo plantear y resolver problemas: desde Pólya hasta los 90

Hay práctica unanimidad en afirmar que la investigación sobre las variables que intervienen en el proceso de resolución de un problema se inicia con los escritos de Pólya. Con anterioridad a Pólya, Dewey (1910) en su obra «How we think» y Wallas (1926) en «The art of Thought» establecen unas secuencias para la resolución de problemas que permanecieron vigentes hasta los trabajos de Pólya. Los modelos de Dewey y Wallas los podemos sintetizar en estos términos:

1. Presentación del problema, lo que Dewey denominará la identificación del problema o de la situación problemática. Para Wallas en esta fase la persona logra concebir el problema como un todo y establece las relaciones parte-todo entre los elementos que intervienen en el problema.
2. Definición precisa del problema, identificación de los rasgos que le son característicos, recolección de la información.
3. Formulación de la hipótesis de resolución, análisis de los medios-fines y definición del plan de acción.
4. Ensayo de la hipótesis: ejecución del plan de acción. En caso de fracaso en la hipótesis propuesta quizás sea necesario dejar el problema en incubación (este término lo encontraremos en los trabajos de Hadamard, 1945).
5. Asunción de las consecuencias.
6. Verificación, evaluación de la solución para comprobar que funciona y, en caso de que sea posible, generalización.

Para Pólya la resolución de problemas y en particular el aprendizaje a partir de esta tarea está basado en la idea de «*redescubrimiento*».

> «Para un aprendizaje eficiente, el alumno debe descubrir por sí mismo una parte de los contenidos tan grande como sea posible en cada circunstancia». (Pólya, 1963, p. 608)

En los trabajos de Pólya la epistemología matemática y la pedagogía matemática están íntimamente relacionadas y por eso una buena lista de problemas y de preguntas bien seleccionadas serán las herramientas idóneas para permitir el *aprendizaje activo* tal y como lo entiende Piaget. Pólya establece sobre todo las bases de la heurística[19] de resolución de problemas: es el primero en describirlas y ordenarlas de tal manera que son suceptibles de ser enseñadas (Schoenfeld, 1980, p. 339). En su obra «*How to solve it*» nos presenta[20]la

[19]Las técnicas que permitirán entender y resolver un problema. Para la DRAE: técnica de indagación y descubrimiento. Consulta realizada el 3 de diciembre en http://dle.rae.es/.

[20]«Cómo plantear y resolver problemas», para este estudio hemos contado con un ejemplar de la segunda edición publicada en 1957.

actividad de resolver problemas como un modo de hacer al que se llega a través de la imitación del maestro y de la práctica:

> ...cuando las preguntas y sugerencias [que te plantea tu maestro] te las diriges a ti mismo y las usas correctamente, pueden ayudarte a resolver los problemas. (Introducción, p. xix)[a].
>
> [a] En las aulas lo que hemos podido observar es que los alumnos crean sus propias pautas por imitación y la mayor parte de las veces estas pautas no son exportables a un amplio rango de problemas o variantes de los mismos y resultan por consiguiente poco exitosas.

Pólya articula este «modo de hacer» en las conocidas cuatro fases: comprender el problema, concebir un plan, ejecutarlo y revisarlo. Y para cada una de ellas queda claramente establecido el rol del maestro y el del alumno.

En la etapa de comprensión el maestro debe proponer problemas de forma natural e interesante para el alumno, con el nivel de dificultad adecuado. El papel del maestro en la fase denominada «concebir un plan» consiste en guiar al alumno, proponerle preguntas que le vayan presentando la estrategia útil para resolver el problema. En la fase de ejecución del plan, es el alumno el que asume la responsabilidad de analizar los detalles del plan, aplicarlos y comprobar que sean correctos. Y una vez en la etapa final, la revisión y verificación del resultado obtenido también es tarea que debe asumir el alumno pues de esta manera se afianza su conocimiento y se da paso a la adquisición de nuevas capacidades que le deberían permitir resolver otros problemas.

Para quien tiene práctica y habilidad, y ha reflexionado sobre su manera de resolver problemas, estas fases parecen naturales, incluso de «sentido común», como llega a señalar Pólya. Pero este no es el caso en la mayoría de los alumnos de Educación Primaria, pues es un procedimiento que requiere un aprendizaje.

En los ejemplos que se exponen en el libro, propios de la Educación Secundaria, los diálogos sugeridos maestro-alumno son lineales y avanzan hacia la solución, sin rodeos, sin bloqueos, sin necesidad de revisar las fases anteriores. Alcanzar el éxito depende de lo acertado de las preguntas que plantee el profesor. El desarrollo de estrategias heurísticas que plantea Pólya delimitan las condiciones que debe cumplir un problema, pues debe permitir que el alumno pueda recurrir a problemas similares, realizar conjeturas, plantear generalizaciones, etc.

Buena parte de los estudios realizados a lo largo de los años 70 (Lucas, Goldeberg, Kantowski, Kilpatrick...) trabajan sobre las ideas de Pólya con el objetivo de demostrar que la heurística puede ayudar a los alumnos a resolver problemas. En estos trabajos se llega a la conclusión de que el punto de partida es enseñar a los alumnos a resolver problemas tal y como lo hacen los expertos[21].

Desde el punto de vista de Schoenfeld (1992, p. 353), este proceso es más descriptivo que prescriptivo: permite identificar la estrategia una vez que esta ha sido utilizada, pero no facilita los detalles suficientes como para que una persona no familiarizada con las estrategias sepa implementalas[22]. Además, conocerlas no es suficiente: hay que saber cómo utilizarlas. Para tratar de solucionar este problema, en «*Teaching problem-solving skills*» Schoenfeld (1980) propone en primer lugar identificar las claves en el problema[23] pues él intrepreta las heurísticas de Pólya como «etiquetas que designan familias de estrategias semejantes» y hay un gran número de ellas, no solo las listadas por Pólya. Proponerle por ejemplo a un alumno «intenta resolver un problema similar más sencillo» es poco concreto, ya que en función de la naturaleza del problema que estemos abordando puede haber docenas de problemas similares más sencillos y es posible que requieran estrategias diferentes. En esta misma línea se pronuncia Puig-Adam (1985, citado en Castro-Martínez, 2008 p. 40):

> «todo cuanto se llega a sacar de esta metodología clásica de los problemas es una cierta costumbre de trazar, de tender caminos que enlacen la solución buscada a las premisas establecidas en la red más o menos vasta de implicaciones lógicas en que están inmersas. Pero a medida que el campo se ensancha y los puntos de partida y de llegada se alejan de las perspectivas corrientes, estos sabios consejos metodológicos muestran una insuficiencia pareja a su generalidad».

Como veremos más adelante, para tratar de paliar estar deficiencias Schoenfeld desarrolla dos versiones de su modelo, la primera en 1979 y la segunda en 1982, y en ellas recoge

[21]Hay que señalar que estos trabajos están también centrados en las aulas de secundaria o nivel universitario o en los talleres extraescolares dedicados a la preparación de alumnos que se presentan a pruebas y competiciones de Matemáticas como por ejemplo las Olimpiadas Matemáticas. Por tanto, muchas veces se analiza cómo resuelven problemas alumnos que son buenos resolutores.

[22]Es decir, son claramente reconocibles por aquellas personas que ya se «han apropiado de ellas» y pueden percibir o identificar cómo usarlas. Puede ser esta una de las razones por las cuales entusiasman tanto a los matemáticos profesionales y las hace tan difíciles de implementar a los maestros.

[23]Palabras o frases que señalan un determinado proceder, por ejemplo «único» puede llevarte a buscar una demostración por reducción al absurdo, «para todo número positivo» sugiere un procedimiento por inducción, etc.

hasta 27 modalidades entre estrategias generales, básicas y actividades específicas.

Las estrategias son presentadas como «llaves para desbloquear o acceder al problema» (Schoenfeld, 1980). Un problema puede ser desbloqueado por una de estas llaves o un subconjunto de ellas, por lo tanto se necesita una técnica que nos permita dar con estas llaves. Esto es lo que Schoenfeld denomina la *heurística global*. Póyla ya había establecido una diferencia entre la *heurística* (Pólya, 1945, pp. 112-113) y la *heurística moderna* (pp. 129-134) en la que lo esencial es comprender el método que conduce a la solución del problema y para esto, tal y como nos dice Schoenfeld, habrá que tener en cuenta tanto el transfondo lógico como el psicológico del resolutor.

En cada una de las etapas propuestas por Pólya hay que analizar qué estrategias seguir, tomar decisiones y aplicarlas. De esta forma surge el modelo en cinco pasos de Schoenfeld que tradicionalmente se representa como el diagrama de flujo de la figura 1.2 (*«the expert performance model for Problem Solving»*) (Schoenfeld, 1980) y que es una versión mejorada del modelo básico de Pólya.

Las distintas fases son concebidas como «estados» por los que se transcurre y a los que se puede volver a lo largo del proceso de resolución hasta dar este por concluido tal y como nos muestra la figura 1.2. Además, cada una de las fases del proceso va acompañado de una lista de posibles heurísticas para ser utilizadas en orden (tabla 1.2).

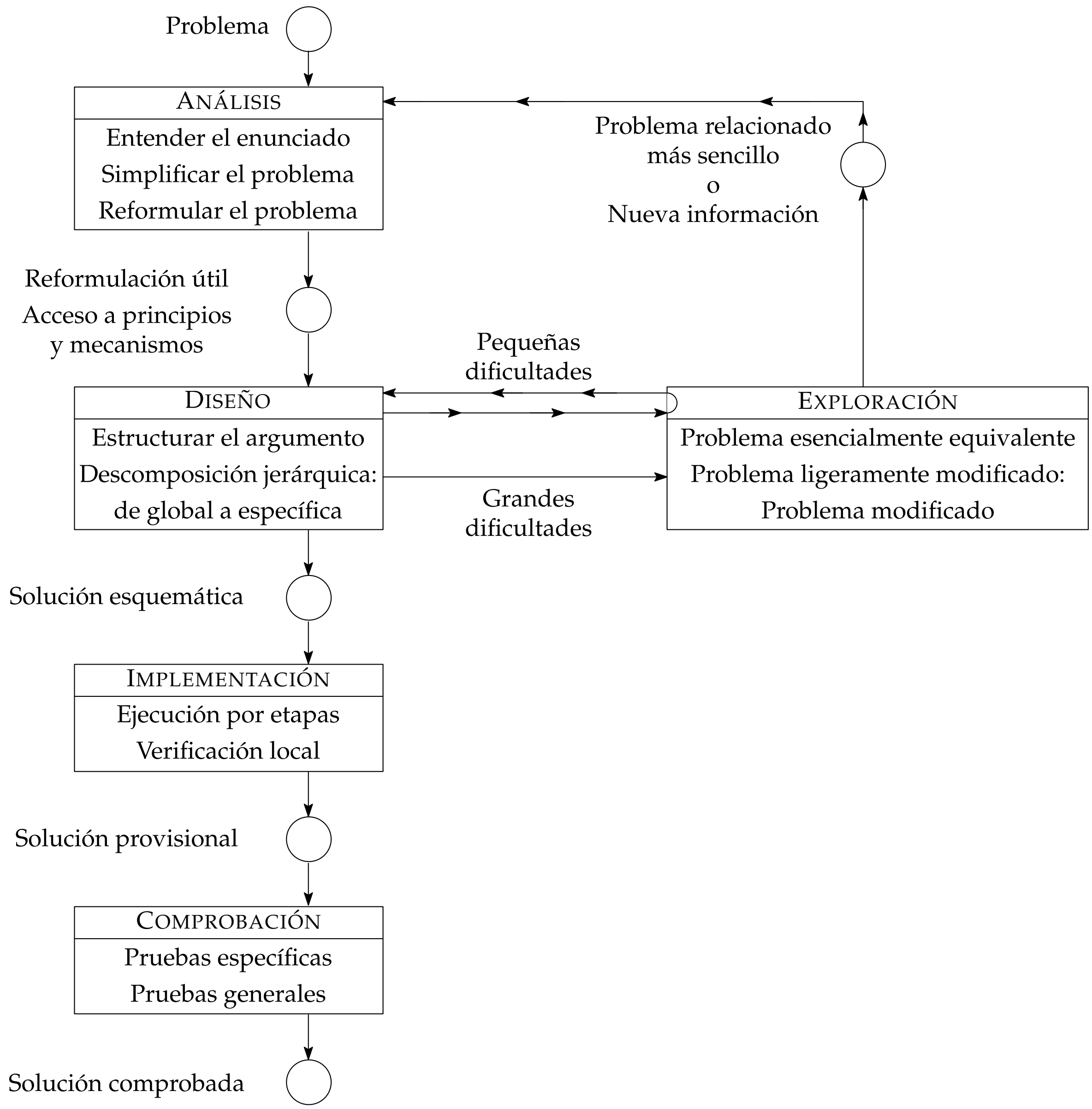


Figura 1.2: Esquema de Schoenfeld del proceso de resolución de problemas.

Tabla 1.2: Relación de heurísticas recomendadas por Schoenfeld (1980).

Heurísticas de uso frecuente

Análisis

1. Dibuja un esquema siempre que sea posible.
2. Estudia casos especiales:
   a) Escoge algún caso concreto para obtener un ejemplo y entender mejor el problema.
   b) Examina los casos extremos para explorar las diferentes posibilidades.
   c) Prueba a asignar los valores 1,2,3,... a los parámetros del problema y busca algún patrón.
3. Intenta simplificar el problema de alguna de estas formas:
   a) Explotando alguna simetría.
   b) Con un argumento tipo «sin pérdida de generalidad» (incluyendo cambio de escala).

Exploración

1. Considera problemas esencialmente equivalentes:
   a) Cambiando unas condiciones por otras equivalentes.
   b) Recombinando los elementos del problema de diferentes formas.
   c) Introduciendo elementos auxiliares.
   d) Reformula el problema de alguna de estas formas:
      i. Cambia de perspectiva, o de notación.
      ii. Considera un argumento de reducción al absurdo, o el contrarrecíproco.
      iii. Imagina que tienes una solución, y determina sus propiedades.
2. Considera problemas ligeramente modificados:
   a) Elige objetivos parciales (que cumplen algunas de las condiciones).
   b) Elimina una condición y trata de reintroducirla posteriormente.
   c) Descompón el espacio del problema y estudia los diferentes casos.
3. Considera problemas ampliamente modificados:
   a) Construye un problema análogo con menos variables.
   b) Fija todas las variables menos una y determina el impacto de esa variable.
   c) Trata de utilizar cualquier problema relacionado que tenga forma, datos o conclusiones similares.

   Recuerda: cuando trabajes con problemas similares más sencillos, debes tratar de explotar tanto el *resultado* como el *método de resolución* del problema dado.

Comprobación de la solución

1. La solución obtenida, ¿pasa estas comprobaciones específicas?
   a) ¿Usa todos los datos necesarios?
   b) ¿Se ajusta a las predicciones y estimaciones previas?
   c) ¿Pasa las pruebas de simetría, análisis dimensional y cambio de escala?
2. La solución obtenida, ¿pasa estas comprobaciones generales?
   a) ¿Se puede obtener de una forma diferente?
   b) ¿Se puede justificar estudiando casos particulares?
   c) ¿Se puede reducir a resultados conocidos?
   d) ¿Se puede usar para deducir algo que ya conoces?

Se abandona el modelo estático de Pólya para convertirse en un modelo dinámico:

> «Para determinar en qué consiste la habilidad de resolver problemas, deberíamos proponer al experto un problema para el que no dispone de un procedimiento para resolverlo. Su comportamiento en esa situación es totalmente distinto al que se observa cuando trabaja en problemas rutinarios o en problemas no rutinarios con los que está familiarizado. A primera vista, su comportamiento ya no parece competente, hasta puede pasar por torpe. Sin un procedimiento de resolución, no tiene una idea clara de por dónde empezar. Quizá no entiende del todo el problema, y se dedique simplemente a "explorarlo" durante un rato, hasta que se encuentre más cómodo con él. Seguramente intentará relacionarlo con problemas conocidos, con la esperanza de que eso le proporcione algo cercano a un procedimiento de resolución del nuevo problema. Ensayará distintas alternativas razonables: hechos similares, problemas relacionados, enfoques de tanteo, etc. Todos ellos deberán ser combinados y sopesados. Es posible que haga un intento en una cierta dirección, y que luego vuelva a empezar. Puede intentar dos o tres cosas durante algunos minutos y después decidir en qué dirección continúa. En medio de un razonamiento, puede detenerse y pensar "esto es más difícil de lo que debería", e intentar algo diferente. O quizá, tras el comentario, puede continuar en la misma dirección. Con suerte, y tras algunos intentos sin éxito, resolverá el problema». (Schoenfeld, 1982, p. 32-33)

Empieza a intuirse que además de los aspectos puramente cognitivos hay otros aspectos con gran influencia en la tarea de resolver problemas: son los aspectos de carácter no cognitivo.

> «El asunto que vamos a tratar, a pesar de que sigue presentando todavía muchos misterios por aclarar, está lejos de ser inexplorado, y se han podido reunir numerosos datos, más abundates y coherentes de lo que podría haberse esperado, dada la dificultad del problema.
>
> Esta dificultad no es solamente intrínseca, sino de naturaleza tal que muchas veces impide el progreso de nuestros conocimientos: me refiero al hecho de que el estudio de la cuestión requiere dos disciplinas, psicología y matemáticas, y por tanto es preciso, para poder tratarla debidamente, ser al mismo tiempo psicólogo y matemático». (Hadamard, 1945, p. 1)

No se trata ya solo de describir los procedimientos para conducir el pensamiento durante la resolución de problemas, sino de estudiar el pensamiento y afrontar la necesidad de estudiar la resolución de problemas desde la perspectiva matemática y psicológica. Hadamard en 1945 ya había expuesto este planteamiento en su «An essay on the psychology of invention in the mathematical field».

Para Hadamard, en el proceso de resolución de problemas hay una actividad consciente y otra inconsciente, y como resultado de ello la creación matemática se puede articular en una serie de fases (parte de las ideas que previamente había expresado Poincaré [1937, 1943]):

— documentación (informarse, leer, escuchar, discutir);

— preparación (realizar un proceso de ensayo y error sobre diferentes vías e hipótesis);

— incubación (en caso de no tener éxito en la tarea anterior, considerar un cambio eventual de actividad, en este tiempo hay un proceso de trabajo subsconciente sobre el problema);

— iluminación (surge una idea repentina, se produce el click del que nos hablará más adelante Claxton [1995]);

— verificación (la idea debe someterse al análisis y comprobación);

— conclusión (reformulación y ordenación de los resultados).

Hadamard reflexiona sobre la naturaleza de la actividad matemática y distingue aspectos que en nuestros días pueden considerarse como parte del dominio afectivo. Años después, Schoenfeld (1983, p. 330) partirá del hecho de que la actividad matemática como comportamiento puramente cognitivo es «extremadamente rara» y de que el aprendizaje como ejercicio puramente racional está inmerso en un cúmulo de afectos, creencias y valores[24].

Nótese que tanto los trabajos de Pólya como los de Hadamard son publicados en el mismo año, 1945. No tuvieron mucha repercusión hasta las reformas educativas de los años 80

[24]En el dominio afectivo en matemáticas se identifican cuatro categorías: creencias, actitudes, emociones y valores. Como sucede con los términos «problema» y «resolución de problemas», también cuando se habla de «dominio afectivo» hay que aclarar qué se entiende por *afecto* y qué se entiende por *dominio afectivo*. Trataremos este punto en apartados posteriores.

del pasado siglo cuando son retomados como base para la formalización de conceptos en la enseñanza de las Matemáticas y su transferencia a las aulas.

Autores como Lesh (1985), Schoenfeld (1983, 1985, 1987), Silver (1982), Lester (1986), Lester, Garofalo y Kroll (1989) retoman estos trabajos y articulan los procesos cognitivos y no cognitivos en cinco caterogías: conocimientos (dimensión cognitiva), control (dimensión metacognitiva), creencias, emociones (dominio afectivo) y los factores contextuales (dimensión social). A continuación sintetizamos las ideas de estos autores:

1. Por *conocimiento* o *recursos* se refieren al conocimiento matemático básico que posee el alumno: definiciones, algoritmos, heurísticas de resolución de problemas, procedimientos rutinarios y no rutinarios, etc. Schoenfeld señala que es importante que el maestro esté al tanto de las herramientas con que cuenta el alumno, pues si ante el problema propuesto el alumno no tiene la posibilidad de intuir qué herramientas va a necesitar, entonces la enseñanza no va a funcionar. El maestro debe además conocer la forma en la que el alumno accede al *inventario de recursos*. Es importante que el maestro y el alumno sean conscientes de las conexiones entre lo que se sabe y cómo se hace uso de este saber. Para Silver (1982) esto requiere estar atento a la forma en la que los alumnos representan, organizan y utilizan sus conocimientos.

   En lo relativo a los recursos Schonfeld arroja luz sobre varios aspectos a considerar como son las llamadas *situaciones estereotipadas*, los *recursos defectuosos* y los *errores de procedimiento*.

   Schonfeld entiende por *situaciones estereotipadas* aquellas en las que se identifican los problemas por secuencias y procedimientos. Por ejemplo, si a un alumno se le propone encontrar un máximo en una situación que parece responder a una función, lo que suele hacer el alumno es tomar la función, buscar los puntos en los que la derivada se anula y analizar la función en estos puntos. Esta es una respuesta estereotipada y el verdadero problema no está en el procedimiento sino en saber encontrar la función. En el ámbito de Educación Primaria los alumnos tienden a situaciones más sencillas, clasifican los problemas como problemas de sumar, de multiplicar, etc. Cuando un problema es de razonamiento lógico o de carácter geométrico y este no responde a la aplicación de una fórmula, el alumno puede llegar a encontrarse perdido.

   Los *recursos defectuosos* engloban las fórmulas mal aprendidas y los procedimientos aplicados en contextos no adecuados (por ejemplo, aplicar un teorema cuando no se cumplen las condiciones de la hipótesis).

Y por último, los *errores de procedimiento* que están ligados a las relaciones que el alumno establece entre sus conocimientos, por ejemplo extrapolar propiedades como la linealidad: ¿por qué $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ cuando $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ y además $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$?

2. Al hablar de *sistemas de control* se refieren a la toma de conciencia de la propia actitud mientras se está trabajando en la resolución de un problema. Qué, cuándo y cómo se analizan y exploran las condiciones del problema, la estrategia a seguir, la solución encontrada, cuándo abandonar un plan o reformularlo, etc. El alumno debe conocerse a sí mismo, saber qué es capaz de hacer y cómo reacciona ante los problemas. Para estos autores, las acciones involucradas en el autocontrol son:

   - La compresión, tener certeza de que se entiende el problema antes de empezar a resolverlo. Pólya también hace hincapié en este aspecto y afirma que si alguien que no entiende un problema llega a resolverlo será fruto de la casualidad. En este punto, y en base a nuestra experiencia, nos gustaría hacer notar lo difícil que es hacer ver a un alumno su error de interpretación cuando ha sido capaz de llegar a la solución numérica correcta usando razonamientos erróneos derivados de la falta de comprensión del problema.
   - Diseñar la forma de resolver el problema, considerar diferentes estrategias y seleccionar una específica.
   - Revisar el proceso y decidir en qué momento, llegado el caso, este no es exitoso y hay que abandonarlo.

   Al abordar la enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas ya no solo habrá que centrarse en la enseñanza de las heurísticas sino también abordar la didáctica metacognitiva; Monereo (1995a y b) presenta tres principios generales para una didáctica metacognitiva:

   a) Enseñar a los alumnos a conocerse mejor como «aprendices», ayudarles a construir su propia identidad o autoimagen cognitiva.

   b) Enseñar a los alumnos a reflexionar sobre su propia manera de aprender con el fin de mejorar el control sobre los procesos cognitivos.

   c) Enseñar a los estudiantes a establecer con ellos mismos un diálogo consciente cuando aprenden, ayudándoles a activar conocimientos previos, enseñándoles a ser «prepositivos», y a establecer un diálogo fructífero con los demás.

Schoenfeld propone algunas de las actividades que pueden ser útiles en este proceso de la didáctica metacognitiva:

- Grabar vídeos de los alumnos durante el proceso de resolución. Analizar el vídeo con los alumnos para que tomen conciencia de lo que han hecho, pues de otro modo una vez resuelto el problema se les olvida lo que fueron haciendo.
- Usar los errores como fuente de revisión. Pólya ya consideraba este aspecto cuando proponía que el docente debe tomar los errores como modelo. Por ejemplo, al resolver un problema se puede elegir una estrategia sobre la que se sabe de antemano que no permitirá concluir con éxito el problema y mostrar con detalle el momento en el que se decide que no se va por buen camino y se debe optar por otra estrategia.
- Trabajar en pequeño grupo para que cada alumno pueda aprender de los otros la forma en la que planifica y controla su trabajo.

Y Monereo nos señala las condiciones en las que se puede abordar esta didáctica de la metacognición:

> «Estas directrices difícilmente encontrarán un campo abonado en prácticas docentes estereotipadas y rutinarias, sino en profesoras y profesores que, como ya hemos advertido, también actúan metacognitivamente en calidad de aprendices y enseñantes de su materia, siendo conscientes de sus propias competencias y limitaciones, planificando, monitorizando y evaluando sus actuaciones docentes y, parafraseando a Séneca: ”tratando siempre de aprender mientras enseñan”. En definitiva, únicamente los profesionales que sean conscientes del impacto real que sobre sí mismos y sobre sus alumnos tienen los procesos educativos que generan serán verdaderamente capaces de enseñar a conciencia». (Monereo, 1995a, p. 80)

3. Las *creencias* para Schoenfled (1985) designan la visión del «mundo matemático» y la «visión matemática del mundo» que tiene el alumno: sus concepciones sobre las matemáticas, los matemáticos y las tareas matemáticas, así como las condiciones ambientales y contextuales en las que se está desarrollando la labor matemática. Para Lester y Garofalo (1989) en la categoría de creencias quedan agrupadas simplemente las creencias sobre las matemáticas y las tareas matemáticas, creencias del tipo: «todo problema matemático verbal puede resolverse mediante la aplicación directa de un algoritmo» (Lester y Garofalo, 1982) y «todo problema de matemáticas

se resuelve en un máximo de diez minutos» (Schoenfeld, 1985, p. 45). Es decir, lo que el alumno piense sobre qué es un problema puede condicionar el tiempo que le dedique a la tarea. Schoenfeld indica que, al igual que ideas previas erróneas pueden causar problemas en el ámbito de las ciencias, en el caso de las matemáticas algunas ideas preconcebidas de los alumnos pueden generar dificultades, en particular en lo relativo a la argumentación formal. El matemático usa la argumentación formal para resolver problemas. En sus investigaciones, Schoenfeld comprueba cómo los alumnos son capaces de seguir un razonamiento formal paso a paso siguiendo la instrucción del profesor pero, cuando deben hacer uso del razonamiento para resolver un problema, los alumnos no son capaces de adaptar el razonamiento y derivan hacia vías empíricas y hacia estrategias de tipo ensayo y error. El alumno descarta la argumentación formal o bien porque es obvia y por lo tanto no es necesario hacerla (por ejemplo demostrar que una fórmula es cierta) o bien si el profesor o la teoría te están diciendo que algo es cierto no hace falta comprobarlo. Esta situación la hemos podido observar en particular en los problemas de geometría: los alumnos argumentan que «es así, porque se ve en el dibujo».

Las creencias sobre cómo hacer matemáticas y cómo son las matemáticas se adquieren a lo largo de los años de escolarización: «hacer matemáticas» significa seguir las pautas establecidas por el profesor; «saber matemáticas» es equivalente a recordar y aplicar correctamente estas pautas y «la verdad matemática» queda establecida cuando la respuesta aportada es ratificada por el profesor. Siguiendo esta línea de pensamiento, Pehkonen y Törner (1996, p. 102) afirman que:

> «las creencias pueden tener un poderoso impacto en la forma en que los alumnos aprenden y utilizan las matemáticas y, por lo tanto, pueden ser un obstáculo para el aprendizaje de las matemáticas. Los alumnos que tienen unas creencias rígidas y negativas sobre las matemáticas y su aprendizaje fácilmente se convertirán en aprendices pasivos que, cuando aprenden, enfatizan la memoria sobre la comprensión».

Aunque las creencias y las prácticas forman un círculo que a veces es difícil de romper, se puede intentar quebrar por la parte de la práctica: el cambio en la práctica de clase puede modificar las creencias tanto de alumnos como del profesorado. (Vila y Callejo, 2009)

Gómez-Chacón (2000) afirma que, a partir de la perspectiva matemática que expresa el alumno, de las creencias que transmite, se puede obtener una buena estimación de las experiencias de aprendizaje que ha tenido y del tipo de enseñanza recibida. Las emociones, actitudes y creencias actúan como fuerzas impulsoras o de resistencia de la actividad matemática. Por lo tanto, si se desea mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, es conveniente tener en cuenta los factores afectivos de los alumnos y los maestros.

4. Los *aspectos afectivos* cubren el amplio rango que va desde las emociones como tales (ansiedad, aversión, frustración, alegría, etc.) a las actitudes (el temor a equivocarse, la resistencia a abordar la tarea, el grado de satisfacción que se siente al resolver la tarea, etc.) y los afectos (el interés, la motivación, etc.). En este bloque se incluye también cómo se autopercibe el sujeto cuando trabaja matemáticas. Gómez-Chacón (2000) afirma que el autoconcepto tiene una fuerte influencia en la visión de las matemáticas que uno tiene y en la reacción hacia ellas. McLeod (1989, 1992, 1994) señala que el autoconcepto del alumno debe concebirse como una subestructura del sistema de creencias en que hay que considerar componentes como las emociones, las actitudes, las atribuciones, motivaciones y expectativas personales acerca de uno mismo relativas a las matemáticas.

   La dimensión afectiva y la interacción con los procesos de construcción del conocimiento es un aspecto que ha sido estudiado por diferentes autores (Mandler, 1989a y b; McLeod 1989a, 1989b, 1992; Gómez-Chacón, 2000; Arteaga y García, 2008).

5. Por último hay que considerar los *factores contextuales*, relacionados con el entorno social o la comunidad donde se desarrolla la práctica matemática: las interacciones entre alumno y profesor, el papel que el profesor confiere a la resolución de problemas, las expectativas del alumno, etc. Estos factores configuran no solo las matemáticas que el alumno aprende sino cómo las aprende y cómo las percibe (Cobb, 1986). A partir de su experiencia, los alumnos van desarrollando ciertas expectativas sobre cómo debe enseñarles matemáticas el profesor. Estas expectativas están basadas esencialmente en el tipo de enseñanza que los alumnos han recibido hasta ese instante. Cuando la situación de aprendizaje no corresponde a estas creencias se producen insatisfacciones y desmotivaciones. Igualmente, el docente tiene sus propias creencias respecto a cómo se enseña y acerca de su rol como profesor. Estas creencias están muy condicionadas por la forma en la que los maestros fueron a su

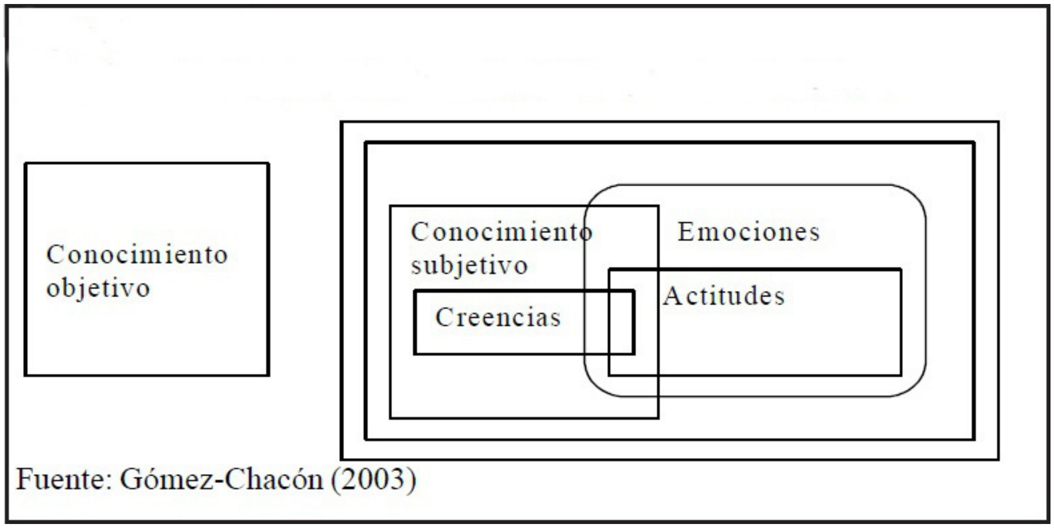


Figura 1.3: Relación entre los principales conceptos y creencias.

> vez formados. De acuerdo con Plata y Trillo (2001)[25], la tendencia más común en la práctica de los docentes de matemáticas es aquella que propicia que el saber, en la disciplina, significa recordar y aplicar las reglas correctas. Estas ideas son transmitidas por los maestros a los alumnos incluso de manera inconsciente.

En resumen, parece claro que el conocimiento matemático, las decisiones de auto-control, las creencias y las actitudes están fuertemente influenciadas por la natrualeza del contexto en el cual se desarrolla la actividad de resolución de problemas. Estos aspectos no están aislados unos de otros, como nos muestra la figura 1.3.

En la segunda mitad de los años 80 surgen estudios que tienen como finalidad proporcionar indicaciones concretas sobre cómo abordar la enseñanza de la heurística y un marco para la resolución de problemas que, en casos como los trabajos de Garofalo y Lester

[25]La investigación con 21 docentes españoles se centró en conocer cómo entendían la enseñanza, cuáles eran sus concepciones sobre las matemáticas y sobre el modo de aprender del alumnado, cómo entendían la evaluación y cuál era la opinión que poseían sobre su propia práctica. Los datos se obtuvieron por medio de entrevistas. Observan que es escasa la reflexión del profesorado acerca del significado de las matemáticas y su contribución a la formación de los alumnos, pues se da por hecho que son fundamentales en la formación de cualquier persona, aunque esto no se vea reflejado en su práctica educativa; además, destacan que la resolución de problemas como estrategia metodológica es poco utilizada en las lecciones; enfatizan que, para el docente, enseñar es transmitir información y que aprender es saber hacer los ejercicios propuestos. Esto lleva a que los conceptos se presenten desligados del contexto en el cual se desarrolla cada estudiante, con poca o ninguna relación con otras áreas, lo que no facilita la comprensión. Respecto a la evaluación, esta fue concebida como sinónimo de examen.

(1985), presentan un esquema cognitivo-metacognitivo que defienden como aplicable a un amplio rango de actividades matemáticas, no solo a la resolución de problemas. En esta época y basándose en los trabajos de Pólya y Schoenfeld, diferentes autores identifican etapas en el proceso y en base a estas establecen sus estrategias de resolución. En muchas ocasiones las fases coinciden y tan solo difieren en las expresiones de las que hacen uso para denominarlas.

Explicamos con mayor detalle el modelo de Schoenfeld por ser después del de Pólya el que está sustentado por el estudio de un mayor número de casos prácticos (la producción de Schoenfeld en este campo con alumnos de secundaria y primeros cursos de universidad es extensísima) y porque desarrolla con mucho detalle cada una de las etapas en lo referente a las heurísticas que se pueden aplicar. En la tabla 1.3 se presentan las características del modelo de Pólya, Schoenfeld y Lester y Garofalo y en ella se pueden observar las similitudes entre los modelos que hemos comentado. A estos modelos les siguen en el tiempo otros que han tenido también gran influencia, como el de Bransford y Stein (1984), conocido como modelo IDEAL, y el de Manson, Burton y Stacey (1988). Ya en el ámbito nacional, citaremos a modo de síntesis el de Miguel de Guzman (1991) y el de Puig (1996), que en su tesis doctoral parte de los trabajos de Schoenfeld y se centra en los problemas aritmético-verbales para el área de Educación Primaria. En la tabla 1.3 se presentan las principales ideas de los modelos desarrollados por Pólya, Schoenfled y el modelo IDEAL de Brandsford y Stein, que pueden ser considerados los modelos «fuente» ya que a partir de estos evolucionan el resto de los autores y en tabla 1.4 presentamos un resumen cronológico de algunos de los modelos más referenciados a nivel internacional.

Estas son las principales carácteristicas del método IDEAL de Bransford y Stein (1984), cuyas siglas hacen referencia a las etapas del proceso:

- *I*: Identificación de los problemas. Mostrar una actitud de búsqueda de problemas, intentar identificar y localizar problemas de forma intencionada. Cuando se adopta esta actitud los problemas se perciben como una oportunidad de cambio, de mejora. Esta es la actitud propia de los inventores, los exploradores.

- *D*: Definición y representación del problema. Una vez identificado el problema, acotarlo, comprenderlo y marcar los objetivos finales que nos proponemos.

- *E*: Exploración de posibles estrategias y evaluación de cómo dichas estrategias pueden contribuir a los objetivos marcados.

- *A*: Anticiparse y actuar. Valorar las posibles consecuencias de la estrategia seleccionada. Anticiparse a los resultados antes de aplicar la estrategia.

- *L*: Logros. Revisar y aprender. Observar y evaluar los efectos de nuestras actividades. Acción retroactiva sobre nuestra forma de proceder y sus consecuencias.

El modelo de «Thinking Mathematically» de Mason, Burton y Stacey (1982) se articula en tres fases:

- La fase de Abordaje (the Entry phase): su objetivo es familiarizarnos con el problema. Debemos intentar buscar respuesta a tres preguntas fundamentales: ¿qué es lo que sé?, ¿qué es lo que quiero? y ¿qué es lo que puedo usar? Esta fase puede darse por concluida cuando somos capaces de contar el problema con nuestras propias palabras, plasmarlo en un diagrama, hacer tablas, etc.

- La fase de Ataque: esta fase solo puede llevarse a cabo si se ha completado con éxito la fase anterior. En esta etapa se enuncian conjeturas y se justifican; la mayor parte de ellas suelen resultar falsas. Las conjeturas surgen como resultado de dos actividades fundamentales: particularización (concentrar nuestra atención en ejemplos) y analogía (encontrar parecidos con problemas ya estudiados). El proceso de justificación contempla tres etapas: buscar el por qué, la razón por la que ciertos entes se comportan de determinada forma; buscar una estructura o patrón, alguna ley o estructura ocultas que sostengan nuestro argumento y que abarquen todos los ejemplos planteados; y el convencimiento: la mejor manera de convencerse de la validez de una conjetura es desarrollar preguntas nuevas, buscar contraejemplos y críticas diversas.

  Esta es la fase de los bloqueos, que son considerados como una situación muy digna que contribuye al desarrollo del razonamiento y de los momentos ¡Ajá! Es en esta fase donde se prueban los conocimientos heurísticos.

- La fase de Revisión: Esta a su vez contempla tres estadios: comprobar la solución, reflexionar sobre las ideas y momentos claves que han conducido al estado final; es la actividad más importante para mejorar el razonamiento matemático y generalizar o extender el resultado a un contexto más amplio.

  Es importante redactar la solución acompañada de lo que se ha hecho y por qué.

Tabla 1.3: Ideas centrales de los principales modelos de resolución de problemas.

Pólya (1945) (en los trabajos de Pólya los elementos de cada una de estas fases no aparecen detallados)	Schoenfeld (1985) (fases y heurísticos propios de cada fase)	Garofalo y Lester (1985) Marco Cognitivo-Metacognitivo
I. Comprender el problema	I. Análisis y comprensión del problema: a) Dibujar, hacer un diagrama o esquema. b) Estudiar casos concretos o especiales. c) Simplificar «sin pérdida de generalidad», buscar simetrías...	I. Orientación (evaluar y comprender el problema): a) Estrategias de comprensión. b) Análisis de la información y las condiciones del problema. c) Evaluación sobre el grado de familiaridad con el problema. d) Representación inicial y posterior. e) Evaluación del nivel de dificultad y las posibilidades de éxito.
II. Elaboración de un plan (*devising a plan*)	II. Diseño (*design of the solution*): a) Organizar jerárquicamente los argumentos. b) Explicar qué se está haciendo y para qué.	II. Organización (qué hacer para elegir las acciones, diseñar un plan): a) Identificación de los objetivos y sub-objetivos. b) Planificación global. c) Planificación local (para implementar planes globales).
III. Ejecutar el plan (*carrying out the plan*)	III. Exploración: Considerar problemas esencialmente equivalentes al que se está trabajando, y si fuera necesario variaciones del mismo	III. Ejecución (qué hacer para ejecutar los planes): a) Ejecución de las acciones locales. b) Seguimiento del progreso de las acciones locales. c) Decisiones sobre el proceso (por ejemplo, velocidad vs. exactitud, grado de elegancia).
IV. Revisión del proceso (*looking back*)	IV. Implementación: a) Revisar paso a paso el proceso de ejecución. b) Realizar comprobaciones parciales.	IV. Verificación (evaluación sobre las decisiones tomadas y los resultados obtenidos). Sobre los procesos de orientación y organización: 1. Analizar lo adecuado de las representaciones escogidas. 2. Analizar las decisiones tomadas. 3. Consistencia y coherencia de planes locales con planes globales y de estos con las metas. Evaluación sobre el proceso de ejecucion: 1. Analizar cómo se han llevado a cabo las acciones. 2. Consistencia de las acciones con los planes. 3. Consistencia de los resultados locales con los planes y las condiciones del problema. 4. Consistencia de los resultados finales con el enunciado.
	V. Verificación: comprobar la solución, analizar su especificidad o posible generalización	

El modelo de Miguel de Guzmán (1991, 1995) queda ampliamente explicado con una gran cantidad de ejemplos en su obra «Para pensar mejor» (1995) aunque ya se venía perfilando en publicaciones anteriores. El objetivo de Guzmán es mejorar nuestros procesos de pensamiento a través de la resolución de problemas; el autor deja claro desde un principio que esto solo se puede alcanzar a partir de la práctica: «en el aprendizaje del pensar sólo la práctica del pensar es verdaderamente útil» (Guzmán, 1995, p. 17). El modelo da mucha importancia a la introspección, al desarrollo del «monitor interno». Para Guzmán la situación ideal de aprendizaje se daría si pudiéramos disponer en todo momento de un experto que nos ayude; como esto no es factible sólo la actitud de observación sobre nuestro propio modo de proceder al enfrentarnos a los problemas paliará esta carencia. El modelo, como el de Schoenfeld, requiere de un desarrollo madurativo importante que no está al alcance de los alumnos de primaria o secundaria obligatoria. De hecho, las investigaciones de Schoenfeld y Guzmán tienen lugar mayoritariamente con alumnos de bachillerato y educación universitaria.

Los aspectos metacognitivos adquieren una gran importancia en este modelo; para empezar, se nos propone ser consciente de las limitaciones personales y sociales que actúan como lastre. Una actitud tranquila, confiada y de disposición para aprender es imprescindible pues de lo contrario se pueden producir bloqueos que nos lleven al desánimo y el abandono de la tarea. Por otro lado se propone el registro en un «protocolo del proceso»: si no reflexionamos sobre lo que ha ocurrido al resolver el problema, cuando trabajamos sobre otro similar reproducimos el camino ya recorrido y podemos caer de nuevo en errores que nos llevaron a callejones sin salida. Esto se puede evitar registrando el protocolo de actuación, en el que debemos registrar dos tipos de anotaciones: las que se refieren al contenido del proceso (lo que hemos ido haciendo, lo que hemos ido pensando, los orígenes de las posibles ideas, etc.) y las que se refieren a la observación sobre uno mismo y sobre el proceso (los estados anímicos, emociones y cambios de actividad mental por los que hemos pasado). El protocolo tiene la finalidad de permitirnos construir un «retrato heurístico» que nos permita conocernos a nosotros mismos como resolutores.

El modelo se articula en cuatro fases:

1. Familiarizarse con el problema. Tratemos de entender a fondo la situación, sin prisas, a nuestro ritmo. Identifiquemos claramente los elementos que itervienen: datos, relaciones e incógnitas. Se trata de entender.

2. Búsqueda de estrategias. Hagamos un listado de aquellas estrategias que conoce-

Tabla 1.4: Etapas en la resolución de problemas propuestas por diferentes autores.

Dewey, 1910 1. Se siente una dificultad. 2. La dificultad es definida y localizada. 3. Se sugieren posibles soluciones. 4. Se consideran las consecuencias. 5. Se acepta una solución.	**Pólya, 1965** 1. Comprender el problema. 2. Concebir un plan. 3. Ejecutar el plan. 4. Examinar la solución obtenida.
Bransford y Stein, 1984 1. Identificación del problema. 2. Definición y representación del problema. 3. Exploración de posibles estrategias. 4. Actuación, fundada en una estrategia. 5. Logros. Observación y evaluación de los efectos de nuestras actividades.	**Schoenfeld, 1987** 1. Análisis y comprensión. 2. Diseño y planificación. 3. Exploración. 4. Verificación.
Mason, Burton y Stacey, 1988 1. Abordaje: comprender el problema y concebir un plan. 2. Ataque: llevar a cabo el plan. 3. Revisión: reflexión sobre el proceso seguido.	**De Corte y Verschaffel, 1989** (solo problemas aritméticos) 1. Lectura y representación. 2. Elección de las operaciones. 3. Ejecución. 4. Solución. 5. Verificación.
Hernández y Socas, 1994. 1. Lectura. 2. Comprensión. 3. Representación-ejecución y solución visual-geométrica. 4. Representación-ejecución y solución formal. 5. Solución. 6. Comprobación.	**Miguel de Guzmán, 1995** 1. Familiarización. 2. Búsqueda de estrategias. 3. Llevar adelante la estrategia. 4. Revisar el proceso. 5. Sacar consecuencias.
Puig, 1996 1. Lectura. 2. Análisis. 3. Exploración. 4. Plan de ejecución. 5. Verificación. 6. Transición. 7. Información nueva y evaluación local.	**Carrillo, 1996** 1. Identificación. 2. Comprensión. 3. Planificación y exploración. 4. Ejecución. 5. Verificación.

Fuente: Ayllón Blanco, 2012, p. 59.

mos y que consideramos que nos puedan ser de utilidad en este momento; no se trata de aplicarlas sino de traerlas a colación y examinarlas frente al problema que se nos propone. Algunas de las que se recomiendan son: empezar por lo más fácil, experimentar a partir de la información obtenida en el paso anterior, hacer un esquema, figura, gráfico, etc., escoger el lenguaje y la notación adecuada, simplificar el problema, ensayo y error, búscar simetrías, explorar los casos límites, etc.

3. Llevar adelante la estrategia. Seleccionamos y probamos las mejores ideas que hayan surgido en la fase anterior, actuando con flexibilidad. Hay que evitar desanimarse ante las primeras contrariedades, y debemos reflexionar sobre la validez de cada paso. Estudiamos a fondo los resultados para convencernos de que es la solución buscada.

4. Revisar el proceso y sacar consecuencias de él. Reflexionamos sobre el camino seguido, qué ha funcionado y por qué, qué no ha funcionado y por qué. ¿Se puede simplificar el proceso?, ¿se puede extender? Reflexionamos sobre nuestra actitud y nuestro propio proceso de resolución. En esta fase se hace primordial disponer del protocolo y cuanto más completo sea tanto más útil resultará.

A lo largo de los años noventa se suceden las investigaciones dirigidas a desarrollar y validar estas teorías y a responder la pregunta[26] ¿cuánta práctica y qué clase de práctica permitirá a los alumnos resolver un espectro amplio de problemas?, al tiempo que surgen las dudas sobre si los modelos que abordan la resolución de problemas desde la perspectiva proceso-producto y la instrucción en modelos heurísticos mejora la capacidad general para resolver problemas o se limita al desarrollo de habilidades específicas. Para los más críticos el paradigma proceso-producto se asemeja a una «caja negra» y por tanto deja sin abordar lo que sucede en el interior de la caja:

> «El modelo sólo estudia concomitancias entre entradas y salidas del sistema; al no haber hilos de explicación no hay posibilidades de orientación racional de nuevos ensayos ante el fracaso». (Gimeno, 1981; citado por García, Carmona y Barrio, 1988, p. 253)

Para el Grupo Cero (1987), estos modelos responden a constructos teóricos sobre el manejo y procesamiento de información y respaldan una visión cibernética del aprendizaje

[26] En «Elementos de resolución de problemas» (1996), Luis Puig pone de manifiesto la validez del marco teórico y de los instrumentos de recogida y análisis de datos de Schoenfeld.

(transforman la teoría en un proceso productivo). Los integrantes de este grupo llegan a establecer un paralelismo entre las fases de Pólya y las etapas de programación en un ordenador. Para ellos, el paradigma que se ha establecido en el currículo, y en los libros de texto, pretende reducir la resolución de problemas a un proceso de carácter algorítmico.

Otros estudios constatan que los alumnos varían de modelo formal de resolución de un problema a otro, e incluso dentro del mismo problema y que hay contradicción entre el número y variedad de estrategias utilizadas por los buenos y los deficientes resolutores (Elia, Heuvel-Panhuizen y Kolovu, 2009; Demetriou, 2004; Barody, 2003; Silver, 1997). Beagle (1979) citado por Castro-Martínez (2008) concluye:

> «De los hallazgos de estos estudios no se han obtenido directrices claras para la educación matemática. De hecho, hay bastantes indicadores de que las estrategias de resolución de problemas dependen tanto del estudiante como del problema, por lo que es demasiado simplista tratar de determinar una (o varias) estrategia que debería ser enseñada a todos (o a la mayoría) de los estudiantes». (p. 145)

El modelo de Guzmán parece querer dar respuesta a estas observaciones, si bien es verdad que como hemos indicado parece aplicable a alumnos con un alto grado de madurez y capacidad de reflexión. Sin embargo, ¿cómo podemos llegar a desarrollar esta desde las etapas iniciales? Quizás en los últimos cursos de secundaria y bachillerato ya sea un poco tarde. En este trabajo nos proponemos familiarizar a los alumnos con su propia manera de pensar, expresarse y ayudarles a ser conscientes de sus capacidades. No somos ambiciosos, solo esperamos que los alumnos puedan, ante un problema, identificar qué saben hacer y qué no, qué se creen capaces de saber solucionar, y por qué.

Al final de los años 90 se consideran superados los estudios sobre heurística de problemas y en cierto modo se abandona este campo de investigación para adentrarse en la resolución de problemas y las nuevas tecnologías de la información.

2.3. El dominio afectivo y el aprendizaje de las matemáticas

En los años noventa distintas investigaciones ponen de manifiesto que el éxito o el fracaso en las Matemáticas no solo depende del conocimiento conceptual, tal y como ya habían anunciado autores como Schoenfeld (1983, 1985) y de McLeod (1989a, 1989b, 1992); conocer hechos, algoritmos y procedimientos no es suficiente para resolver con éxito las tareas matemáticas no rutinarias, y en particular los problemas. Los trabajos sobre los afectos, creencias, actitudes y emociones de Goldin (1988), Gómez-Chacón (1997, 1998) y Mc Leod (1989a, 1989b, 1992) son la respuesta desde el campo de las Matemáticas a los estudios sobre «alfabetización emocional» de autores como Salovey y Mayer (1990) y Goleman (1996).

Siguiendo a Gómez-Chacón (2000) al tratar de abordar de forma precisa y rigurosa el afecto y el aprendizaje matemático se ponen de manifiesto las dificultades para encontrar una definición clara, la delimitación de los descriptores básicos, la estructuración de marcos teóricos y la articulación entre teoría y práctica. Para McLeod (1989a) el concepto engloba «un extenso rango de sentimientos y humores (estados de ánimo), que son generalmente considerados como algo diferente de la pura cognición, e incluye como componentes específicos de este dominio las actitudes, creencias y emociones» (McLeod, 1989, p. 245).

La relación entre los afectos y el aprendizaje es cíclica. Las experiencias que va acumulando el alumno fruto de su «interacción con las matemáticas» van dando lugar a la formación de ciertas creencias sobre la disciplina, sobre sí mismo y sobre su potencial como aprendiz. Al tiempo que sus reacciones emocionales ya sean de forma positiva o negativa como respuesta a esta «interacción» está condicionada por las características concretas y diferenciales del aula, del entorno familiar y social. Todo ello genera sentimientos (emociones) de satisfacción, frustración, etc. Si las condiciones generadas en el aula, el entorno familiar y social se reiteran, las emociones se van «solidificando» hasta convertirse en actitudes positivas o negativas hacia las Matemáticas, su aprendizaje y hacia sí mismo y estas influyen en sus creencias originales y en su capacidad para aprender.

Los descriptores básicos del dominio afectivo en matemáticas serán tres: las creencias, las actitudes y las emociones (McLeod, 1989b, 1992). McLeod describe las emociones como más intensas y menos estables, las creencias como menos intensa y más estables; y sitúa las actitudes entre ambas dimensiones. Más tarde Lafortune y St. Pierre (1994) and DeBellis y Goldin (1997), añaden un cuarto elemento, los valores. Gómez-Chacón (2000) añade las apreciaciones.

La mayoría de las investigaciones en afecto y matemáticas han utilizado los tres descriptores considerados por McLeod desde distintos marcos de referencia y no parecen llegar a un consenso sobre su definición. Para delimitar estos campos vamos a considerar las aportaciones de McLeod en el monográfico *Research on affect in mathematics education: A reconceptualization*, en el Handbook *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (1992):

- Las creencias forman parte del conocimiento subjetivo del individuo, están basadas en las experiencias. McLeod diferencia cuatro categorías: las creencias acerca de las Matemáticas y de su enseñanza y aprendizaje, las creencias acerca de uno mismo como aprendiz de matemáticas, las creencias sobre la enseñanza de las matemáticas y las creencias suscitadas por el contexto social.

  Entre los alumnos de este estudio hemos podido comprobar que ellos consideran que las matemáticas son importantes porque «se estudian en el colegio», «se lo dicen las maestras y sus padres» y que «son difíciles, aunque las cuentas son fáciles». Los afectos no parecen estar interviniendo en este tipo de apreciaciones. Es el contexto escolar, familiar y la organización del sistema educativo los que llevan a los alumnos a formarse este tipo de opiniones. Pero sí hemos podido detectar otro tipo de creencias, expresiones recogidas durante las sesiones como «¡toma! me ha salido, ya sé por qué me gustan las matemáticas» y «es que a mí no me salen los problemas, no se me dan bien» responden al autoconcepto del alumno y a su relación con la materia; estas creencias tienen una fuerte carga afectiva y terminan configurando el estilo atribucional del alumno. Conseguir que el alumno se implique activamente en la tarea, que se sienta confiado y con ello competente y comience a confiar en sus propias capacidades influirá positivamente en las posibilidades de éxito y en la cantidad de esfuerzo necesario para que realicen las tareas. Los autores de referencia para el estudio del papel de las creencias en la resolución de problemas matemáticos son Thomson (1992), Pehkonen y Törner (1996) y las revisiones más recientes de Leder, Pehkonen y Töner (2002) y Muis (2004) y Vila y Callejo (2004).

- Las emociones surgen como respuesta a un suceso y tienen una fuerte carga positiva o negativa, son respuestas afectivas que van más allá de los cognitivo, fisiológico y psicológico y que son fruto del complejo sistema en el que intervienen el proceso de aprendizaje, la influencia social y de la interpretación personal. Por ejemplo, un alumno que experimenta vergüenza ante un resultado negativo atribuye este resultado a una falta de capacidad por su parte; un alumno que se siente orgulloso responde así como resultado de una tarea realizada con éxito y atribuye este resultado a causas internas. La principal dificultad con que se enfrenta el estudio de las emociones en el aprendizaje de las matemáticas deriva de la dificultad del diagnóstico y de la falta de instrumentos adecuados para ello (Gómez-Chacón, 2000), las emociones son difíciles de identificar incluso para la persona que las experimenta. Según los expertos, las emociones forman parte de una construcción social. La forma como la persona se comporta, lo que ella siente y lo que ella dice, depende no solo de las características de la persona sino de la situación en la que se encuentra. Los marcos teóricos de referencia establecidos para el estudio de las emociones y la resolución de problemas se deben a Mandler (1984, 1985, 1989a y b), Weiner (1986) y Gómez-Chacón (2004).

- Las actitudes se definen como una predisposición positiva o negativa que determina las intenciones personales y que influye en el comportamiento. Gómez-Chacón (2000) atribuye la abundancia de los fracasos en el aprendizaje de las matemáticas a las actitudes negativas originadas por factores ambientales y personales. Detectar y estudiar estos factores es el primer paso para contrarrestar su influencia negativa. La implicación activa del alumno en el proceso de aprendizaje aumenta cuando se siente competente, cuando confía en sus propias capacidades y tiene altas expectativas de autoeficacia, valora positivamente las tareas y se implica en las mismas. El estudio de las actitudes nos lleva a considerar tres componentes: uno cognitivo que se manifiesta en las creencias subyacentes a la actitud; otro afectivo que da lugar a los sentimientos de aceptación o rechazo hacia las matemáticas y una componente intencional que marca la tendencia hacia un determinado comportamiento. Ahora bien, estas componentes de acuerdo con autores Aiken y Aiken (1969) se pueden agrupar en dos categorías cuando se trata del estudio de las ciencias: actitudes hacia la ciencia (cuando el objeto de la actitud es la propia ciencia) y actitudes científicas (si el objeto de la actitud son los procesos y actividades de la ciencia, la epistemología científica). Desde la perspectiva de la educación matemática se traducen en: actitudes hacia la Matemática y actitudes matemáticas (Callejo, 1994; Hart, 1989; NCTM, 1989; Hernández y Gómez-Chacón, 1997; Gómez-Chacón, 2009).

    - Las actitudes hacia la Matemática se refieren a la valoración y aprecio de la disciplina, interés por su aprendizaje. Esta categoría muestra una fuerte componente afectiva. Los estudios han puesto de manifiesto que hay factores curriculares, personales, y de contexto socio-cultural y familiar que están relacionados con las actitudes hacia las matemáticas: «si este es un problema de fracciones, yo no lo sé hacer. Me salen siempre mal», «está çhupado", es un problema de multiplicar», «no, que lo cuente él, él siempre los tiene bien»

    - Las actitudes matemáticas, tienen un carácter cognitivo y se refieren a las capacidades necesarias para abordar las tareas matemáticas de mayor demanda cognitiva como son la flexibilidad de pensamiento, el espíritu crítico, la objetividad, etc.

En este trabajo abordaremos conjuntamente el desarrollo en habilidades como resolutor de problemas y de los sentimientos de autoeficacia destinados a manejar con éxito o evitar las situaciones de ansiedad ante la resolución de problemas, la sensación de malestar, de frustación, inseguridad, etc., que dan lugar a un bajo autoconcepto y que impiden al alumno afrontar con éxito y eficacia las tareas matemáticas.

Para concretar la propuesta de investigación se han estudiado el papel que nuestro currículo le otorga a la resolución de problemas y como esto s se abordan en países con mejores resultados académicos que nuestro como son Singapur y Holanda.

3. Marco curricular

En este apartado vamos a revisar el tratamiento que ha recibido la resolución de problemas en los sucesivos marcos legales en materia educativa de nuestro país. Analizar este aspecto es equivalente a analizar el currículo pretendido.

Repasaremos en los siguientes apartados la resolución de problemas en el currículo de Educación Primaria a lo largo de las diferentes leyes educativas que se han sucedido en nuestro país desde la derogación en 1990 de la Ley General de Educación (1970), de la Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE) a la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE) pasando por la Ley Orgánica 10/2002, de 23 de diciembre, de Calidad de la Educación (LOCE) y la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE).

3.1. El diseño currícular base y la LOGSE

Ya hemos visto en apartados anteriores cómo los movimientos internacionales en torno a la enseñanza de las matemáticas que se desarrollaron en la década de los 80 colocaron la resolución de problemas como uno de los objetivos fundamentales del currículo de esta materia y así se pretendió recoger en la reforma educativa que se emprende en España a finales de los 80 y que se concreta en la Ley Orgánica de Organización General del Sistema Educativo (LOGSE) de 1990.

La doble condición de contenido y metodología que acompaña a la resolución de problemas queda patente en el tratamiento que recibe tanto en el Diseño Curricular Base

(DCB, 1989) como en el Real Decreto 1006/1991 que establece las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Primaria[27]. Con ligeras variaciones en la redacción, a lo largo de ambos documentos se hace mención a la resolución de problemas desde una u otra perspectiva, o desde ambas simultáneamente, y resulta más notable su presencia y desarrollo en el DCB que en el RD 1006/1991.

Así, por ejemplo, se considera que uno de los objetivos generales de la Educación Primaria es «utilizar, en un contexto de resolución de problemas sencillos, los procedimientos adecuados para obtener la información pertinente, seleccionarla, organizarla, representarla y tomar decisiones, así como para llevar a cabo estas anticipando y planificando las condiciones materiales y temporales necesarias para su realización» (DCB, 1989, p. 79). Un planteamiento similar aparece de nuevo al hablar de las aportaciones del área de Matemáticas para alcanzar estos objetivos (p. 84).

En el DCB se habla además de la resolución de problemas como actividad, pero la descripción que de esta actividad se hace es tan confusa que parece más bien desplazarla hacia un contenido metodológico:

> «la finalidad formativa del aprendizaje de las matemáticas ha sido un argumento tradicionalmente utilizado para justificar su inclusión en el currículo de la Educación Obligatoria. Aunque en la actualidad el peso de este argumento ha disminuido considerablemente —entre otras razones, porque se ha tomado conciencia de que su mayor o menor incidencia sobre la formación intelectual de los alumnos, al igual que sucede con los contenidos de las otras áreas curriculares, depende sobre todo de la manera como se enseñan y se aprenden—, sigue pareciendo razonable suponer que determinadas formas de actividad matemática (por ejemplo, seleccionar y aplicar algoritmos, elaborar estrategias de resolución de problemas, realizar inferencias, explorar e identificar relaciones entre objetos, situaciones o sucesos, buscar semejanzas y diferencias, etc.) favorecen el desarrollo y la adquisición de capacidades cognitivas muy generales contempladas en los Objetivos Generales de la Educación Obligatoria». (p. 382)

En el desarrollo final de la Ley, la resolución de problemas es contemplada como un conjunto de procedimientos y como tal debería haber estado reflejado dentro de los conte-

[27]Puig (2008) presenta en el XII Simposio de la SEIEM una revisión sobre la resolución de problemas a lo largo de la investigación y la legislación centrada en la Educación Secundaria. En ella hace mención a esta doble vertiente y la falta de concreción que hace que como contenido no resulte finalmente bien definido y como metodología se propone un estilo heurístico con mucha práctica repetitiva.

nidos, pero solo aparecerá como procedimiento al que se le hacen corresponder cuatro criterios de evaluación, dentro del bloque de Números y Operaciones (uno de los cuatro bloques de contenidos a trabajar en el currículo de la materia).

Por su parte en el DCB se incluye un apartado de «Orientaciones específicas para la resolución de problemas» (pp. 421 - 422) de las que destacamos:

- Orientación n.º 44:

  La resolución de problemas dentro del currículo de Matemáticas es un contenido prioritario, porque es un medio de aprendizaje y refuerzo de contenidos, da sentido aplicativo al área y permite la interrelación entre los distintos bloques y las restantes áreas.

- Orientación n.º 45:

  La resolución activa de problemas es considerada como el método más conveniente de aprender Matemáticas; (...). Es interesante proponer problemas abiertos con dificultades crecientes, de manera que sea posible hacer conjeturas, buscar analogías y referirlos a situaciones más generales para que el alumno pueda encontrar respuesta a las nuevas situaciones-problema que se le plantean.

- Orientación n.º 46:

  La dificultad que ha supuesto para los alumnos la resolución de problemas radica, en general, en unos planteamientos metodológicos inadecuados y especialmente en la falta de motivación. En los planteamientos metodológicos se ha de tener en cuenta que el alumno debe desarrollar y perfeccionar sus propias estrategias, a la vez que adquiere otras generales y específicas que le permiten enfrentarse a las nuevas situaciones con probabilidad de éxito. En este sentido se brindará a los niños la oportunidad de familiarizarse con procesos que facilitan la exploración y resolución de problemas como: comprensión y expresión de la situación matemática (verbalización, dramatización, discusión en equipo), extracción de datos y análisis de los mismos, representación en forma gráfica del problema o situación, formulación de conjeturas y verificación de su validez o no, exploración mediante ensayo y error, formulaciones nuevas del problema, comprobación de resultados y comunicación de los mismos. Se hace necesario, asimismo, desarrollar la capacidad de persistir en la exploración de un problema.

3.2. La resolución de problemas en la LOCE

La LOGSE (1990) es derogada antes incluso de que se hubiera completado su implantación generalizada. Es sustituida por la LOCE (Ley Orgánica 10/2002, de 23 de diciembre, de Calidad de la Educación). En la exposición de motivos de la ley se dice: «Las evaluaciones y los análisis de nuestro sistema educativo, efectuados por organismos e instituciones tanto nacionales como internacionales, revelan deficiencias de rendimiento preocupantes con relación a los países de nuestro entorno económico y cultural. [...] Además, nuestros alumnos se sitúan por debajo de la media de la Unión Europea en sus conocimientos de materias instrumentales como las matemáticas y las ciencias, fundamentales en una realidad social y económica en la que la dimensión científico-tecnológica del conocimiento es primordial». (BOE, núm. 307, de 24 de diciembre de 2002, p. 45189)

A pesar de ello, la resolución de problemas deja de ser el centro del currículo y pasa a ser una de las 13 *capacidades* que contribuye a desarrollar la etapa de Educación Primaria: «Iniciarse en la resolución de problemas que requieran la realización de operaciones elementales de cálculo, conocimientos geométricos y estimaciones», (BOE, núm. 307, de 24 de diciembre de 2002, p. 45195).

En el artículo 8.2, se dice que será el Gobierno el encargado de fijar las enseñanzas comunes, el currículo básico. Así pues, es el en Real Decreto 830/2003 donde encontramos las enseñanzas comunes de la Educación Primaria. En el artículo 3 de este RD se mencionan los objetivos generales de la Educación Primaria y se repite literalmente las capacidades antes mencionadas, lo establecido en el capítulo IV, art. 5.2 de la Ley Orgánica 10/2002.

Ya en el Anexo I, «Elementos básicos del currículo de Educación Primaria», de este mismo RD y en la introducción del área de Matemáticas se menciona en varias ocasiones la resolución de problemas:

> «La adquisición del conocimiento matemático va paralela al desarrollo del pensamiento lógico, y el eje central en torno al cual giran esta adquisición y desarrollo es la resolución de problemas». (BOE, núm. 157, de 2 de julio de 2003, p. 25462)

La resolución de problemas es una actividad en la que aplicar lo estudiado:

> «Descubrir las posibilidades de la propia capacidad para entender, razonar y aplicar correctamente los conocimientos adquiridos son acciones que, convertidas en hábito, facilitarán la capacidad del alumno para enfrentarse a la detección y resolución de problemas en los distintos ámbitos en que los habrá de desenvolverse.
> Esta enseñanza se basará en actividades que utilicen la comprensión del cálculo, la medida, los conceptos espacio-temporales y la formulación de problemas de forma clara, precisa y sin ambigüedades». (BOE, núm. 157, de 2 de julio de 2003, p. 25462)

En los contenidos, especificados para primer, segundo y tercer ciclo de Educación Primaria, no se hace mención a la resolución de problemas pero sí hay criterios de evaluación para cada uno de los ciclos, quedando claro que la resolución de problemas es el campo de aplicación de los conceptos aprendidos:

- Para el primer ciclo:

  Criterio número 6. Resolver problemas de la vida cotidiana, de forma razonada, mediante la adición o la sustracción. (BOE, núm. 157, de 2 de julio de 2003, p. 25463)

- Para el segundo ciclo:

  Criterio número 4. Resolver problemas de la vida cotidiana, mediante una o dos operaciones aritméticas y comprobar, de forma razonada, los resultados obtenidos. (BOE, núm. 157, de 2 de julio de 2003, p. 25463)

- Para el tercer ciclo:

  Criterio número 6. Resolver problemas de la vida cotidiana, mediante el uso de las operaciones aritméticas con números naturales, comprobando los resultados de forma razonada. Formular enunciados de la vida real y cuestiones que se correspondan con una expresión matemática dada, de la forma: (a + b; a – b; a x c; a : d), donde a, b, c y d sean números naturales.

  Criterio número 8. Leer, escribir, ordenar y operar con fracciones y números decimales, y resolver problemas sencillos en los que se utilicen: la fracción, el número decimal, la relación entre ellos, el redondeo y el tanto por ciento.(BOE, núm. 157, de 2 de julio de 2003, p. 25464)

El desarrollo de esta normativa fue muy desigual en las diferentes comunidades autónomas. Se da el caso de comunidades en las que no llegó a publicarse decreto alguno que abordase el desarrollo del currículo y otras como la de Madrid, en la que resolución de problemas solo aparece en el bloque de objetivos y vinculada al uso correcto del vocabulario y la lengua castellana, (objetivo número 13): «Utilizar un castellano correcto, con el vocabulario específico» (Decreto 72/2004, BOCM, núm. 98, del 26 de abril de 2004, pp. 13-37). Los contenidos que hemos detallado en el párrafo anterior no aparecieron como tales sino que pasaron a formar parte de los criterios de evaluación en cada uno de los ciclos.

3.3. La resolución de problemas en la LOE

La Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE) organiza la enseñanza en términos de competencias básicas[28], definidas (Título preliminar, Capítulo III, Artículo 6, BOE, núm. 106, de 4 de mayo de 2006, p. 17166) como las capacidades para aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, con el fin de lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos. Para el conjunto del currículo se recogen ocho competencias, siendo la segunda la «competencia matemática»[29]:

En el Título II, Capítulo II, Artículo 17 de la ley, se fijan los objetivos de la Educación Primaria:

> «Desarrollar las competencias matemáticas básicas e iniciarse en la resolución de problemas que requieran la realización de operaciones elementales de cálculo, conocimientos geométricos y estimaciones, así como ser capaces de aplicarlos a las situaciones de su vida cotidiana». (BOE, núm. 106, de 4 de mayo de 2006, p. 17168)

En el Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas

[28]La Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, establece y describe las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la Educación Primaria, la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato.

[29]La competencia matemática implica la capacidad de aplicar el razonamiento matemático y sus herramientas para describir, interpretar y predecir distintos fenómenos en su contexto [...]. Se trata, por tanto, de reconocer el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo y utilizar los conceptos, procedimientos y herramientas para aplicarlos en la resolución de los problemas que puedan surgir en una situación determinada a lo largo de la vida.

mínimas de la Educación Primaria[30], la resolución de problemas se coloca en un lugar central y no aparece solo relacionada con la competencia matemática, que en este contexto se define de esta forma:

> «la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral [...]. Esta competencia cobra realidad y sentido en la medida que los elementos y razonamientos matemáticos son utilizados para enfrentarse a aquellas situaciones cotidianas que los precisan. Por tanto, la identificación de tales situaciones, la aplicación de estrategias de resolución de problemas, y la selección de las técnicas adecuadas para calcular, representar e interpretar la realidad a partir de la información disponible están incluidas en ella».(BOE, núm. 293, de 8 de diciembre de 2006, p. 43059)

Y ya dentro del área de matemáticas la resolución de problemas aparece como uno de los objetivos básicos de la instrucción en la materia:

> «Los procesos de resolución de problemas constituyen uno de los ejes principales de la actividad matemática y deben ser fuente y soporte principal del aprendizaje matemático a lo largo de la etapa, puesto que constituyen la piedra angular de la educación matemática. En la resolución de un problema se requieren y se utilizan muchas de las capacidades básicas: leer comprensivamente, reflexionar, establecer un plan de trabajo que se va revisando durante la resolución, modificar el plan si es necesario, comprobar la solución si se ha encontrado, hasta la comunicación de los resultados».(BOE, núm. 293, de 8 de diciembre de 2006, p. 43096)

Los contenidos se organizan en cuatro bloques que responden al tipo de objetos matemáticos que se manejan en cada uno de ellos: Números y operaciones, Medida, Geometría y Tratamiento de la información, azar y probabilidad. Se indica expresamente que han de

[30] La LOE, en su artículo 6.2, establece que corresponde al Gobierno fijar las enseñanzas mínimas a las que se refiere la disposición adicional primera, apartado 2, letra c) de la Ley Orgánica 8/1985, de 3 de junio, reguladora del Derecho a la Educación. Las enseñanzas mínimas son los aspectos básicos del currículo en relación con los objetivos, las competencias básicas, los contenidos y los criterios de evaluación. El objeto de este real decreto es establecer las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria.

trabajarse de manera relacionada siendo la resolución de problemas la que actúa como eje vertebrador que recorre transversalmente todos los bloques y por ello se incluye con especial relevancia en cada uno de ellos.

Cuando se trata el papel de las matemáticas en la adquisición de las competencias básicas, las técnicas de resolución de problemas vuelven a aparecer como contenido en el currículo:

> «Los contenidos asociados a la resolución de problemas constituyen la principal aportación que desde el área se puede hacer a la autonomía e iniciativa personal. La resolución de problemas tiene, al menos, tres vertientes complementarias asociadas al desarrollo de esta competencia: la planificación, la gestión de los recursos y la valoración de los resultados. La planificación está aquí asociada a la comprensión en detalle de la situación planteada para trazar un plan y buscar estrategias y, en definitiva, para tomar decisiones; la gestión de los recursos incluye la optimización de los procesos de resolución; por su parte, la evaluación periódica del proceso y la valoración de los resultados permite hacer frente a otros problemas o situaciones con mayores posibilidades de éxito».(BOE, núm. 293, de 8 de diciembre de 2006, p. 43096)

Esta dimensión aparece también en los criterios de evaluación a partir de segundo, y en sexto curso queda ya bien delimitada:

> «En un contexto de resolución de problemas sencillos, anticipar una solución razonable y buscar los procedimientos matemáticos más adecuados para abordar el proceso de resolución. Valorar las diferentes estrategias y perseverar en la búsqueda de datos y soluciones precisas, tanto en la formulación como en la resolución de un problema. Expresar de forma ordenada y clara, oralmente y por escrito, el proceso seguido en la resolución de problemas.
> Este criterio está dirigido especialmente a comprobar la capacidad en la resolución de problemas, atendiendo al proceso seguido. Se trata de verificar que ante un problema los alumnos y las alumnas tratan de resolverlo de forma lógica y reflexiva y comprobar que comprenden la importancia que el orden y la claridad tienen en la presentación de los datos y en la búsqueda de la solución correcta, para detectar los posibles errores, para explicar el razonamiento seguido y para argumentar sobre la validez de una solución».(BOE, núm. 293, de 8 de diciembre de 2006, p. 43101)

3.4. La resolución de problemas en la LOMCE

El currículo actualmente en vigor es el establecido en el Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de Educación Primaria, que responde al desarrollo de la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE). En noviembre de 2013 se aprueba esta nueva ley, muy controvertida y contestada por varios sectores sociales y políticos, en especial desde el ámbito de la educación, y que está de nuevo en proceso de revisión.

En el texto de la ley aparece un artículo único que contempla las modificaciones a la LOE(2006) y en este artículo encontramos varias referencias a la resolución de problemas:

Se añade un nuevo artículo 6 bis, dentro del capítulo III: currículo y distribución de competencias, en el que se recoge la nueva organización de asignaturas. El currículo pasa a estar organizado en «asignaturas troncales», «asignaturas específicas» y «asignaturas de libre configuración autonómica». Le corresponde al Gobierno determinar los contenidos de las asignaturas troncales mientras que las Administraciones educativas podrán «complementar los contenidos de las asignaturas troncales» y «establecer los contenidos de los bloques de asignaturas específicas y de libre configuración autonómica». En Educación Primaria (Art. 1.9) las asignaturas troncales son Ciencias de la Naturaleza, Ciencias Sociales, Lengua Castellana y Literatura, Matemáticas y Primera Lengua Extranjera. Por tanto, los contenidos del área de Matemáticas quedan especificados a nivel nacional; como veremos a continuación, dentro de estos contenidos aparece explícitamente la resolución de problemas.

Una de las medidas más polémicas de la ley es la relativa a la evaluación a lo largo de las etapas. La nueva redacción del artículo 20 (evaluación durante la etapa) incorpora este punto:

> «Los centros docentes realizarán una evaluación individualizada a todos los alumnos y alumnas al finalizar el tercer curso de Educación Primaria, según dispongan las Administraciones educativas, en la que se comprobará el grado de dominio de las destrezas, capacidades y habilidades en expresión y comprensión oral y escrita, cálculo y resolución de problemas en relación con el grado de adquisición de la competencia en comunicación lingüística y de la competencia matemática».(BOE, núm. 295, de 10 de diciembre de 2013, p. 97872)

Esta mención expresa a la resolución de problemas ya figura en el artículo 21 que hace referencia a la evaluación individualizada al final de la etapa, en 6.º curso. Como el objetivo de esta evaluación es medir el grado de adquisición por parte de los alumnos de las competencias en comunicación lingüística, matemática y de las competencias básicas en ciencia y tecnología, así como el logro de los objetivos de la etapa, es de esperar que la resolución de problemas reciba la atención necesaria en el tercer ciclo de la etapa.

Ya en el desarrollo del currículo (Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero) encontramos:

> «Para facilitar la concreción curricular, los contenidos se han organizado en cinco grandes bloques: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas; Números; Medida; Geometría; Estadística y probabilidad. Pero esta agrupación no determina métodos concretos, solo es una forma de organizar los contenidos que han de ser abordados de una manera enlazada atendiendo a la configuración cíclica de la enseñanza del área, construyendo unos contenidos sobre los otros, como una estructura de relaciones observables de forma que se facilite su comprensión y aplicación en contextos cada vez más enriquecedores y complejos. Esta agrupación no implica una organización cerrada, por el contrario permitirá organizar de diferentes maneras los contenidos adoptando la metodología más adecuada a las características de los mismos y del grupo de alumnos.
> El Bloque 1 se ha formulado con la intención de que sea la columna vertebral del resto de los bloques y de esta manera forme parte del quehacer diario en el aula para trabajar el resto de los contenidos y conseguir que todo el alumnado, al acabar la Educación Primaria, sea capaz de describir y analizar situaciones de cambio, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones. Se debe trabajar en la profundización en los problemas resueltos, planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, etc., y expresar verbalmente de forma razonada el proceso seguido en la resolución de un problema, y utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas». (BOE, núm. 52, de 1 de marzo de 2014, p. 19387)

Y se establecen unos estándares de aprendizaje y unos criterios de evaluación (redactados en infinitivo a modo de objetivos) en los que se hace mención específica a la resolución de problemas en todos y cada uno de los bloques. Esta es la normativa legal que mayor peso le da a la resolución de problemas y a la heurística como contenido explícito. Queda ahora por analizar la concreción de esta propuesta en los libros de texto y en las aulas en particular, pero esto pasa a ser ya parte del contenido de nuestra intervención.

Abordamos a continuación el marco metodológico en el que se sitúa nuestra propuesta de intervención.

4. Marco metodológico

En esta sección se presenta el marco metodológico en el que se sitúa este trabajo y se justifica la elección del paradigma de investigación de diseño dirigida por una conjetura que ha servido para guiar el diseño y análisis de los resultados de la investigación.

El marco teórico y el marco metodológico son dos piezas fundamentales del proceso investigador que están estrechamente ligadas. Bernstein (1996) explica que las teorías en las que, como investigadores, contextualizamos nuestros trabajos son sistemas de conceptos que explican la realidad y que condicionan la metodología a través de la cual nos acercamos a esa realidad con la intención de conocerla. De esta forma un trabajo de investigación en el aula se convierte en un «experimento de enseñanza» llevado a cabo dentro de diferentes «entornos culturales».

Hammersley y Atkinson (1994) entienden la escuela como una cultura o un sistema desde el que cobra sentido la actividad de los individuos. Cada centro educativo, cada aula, puede interpretarse como un «micro-sistema o «micro-cultura». Para Brown (1992) un aula, con toda su riqueza, complejidad y variabilidad, funciona como un todo sistémico, y es casi tan imposible cambiar un aspecto del sistema sin crear perturbaciones en otros como estudiar cualquier aspecto aislado de los demás. De ahí la relevancia de trabajar en entornos naturales, partiendo de los problemas que se generan en una realidad compleja, ideando soluciones y evaluando su idoneidad en esa misma realidad.

Una de las peculiaridades de la investigación en el aula es que cuanto en ella acontece sólo puede ser entendido e interpretado en su contexto, entendido este en el sentido más amplio posible, más allá del espacio-tiempo concreto de la sesión de matemáticas observada. Por ello, es fundamental que el investigador «esté presente», que se comprometa en determinados aspectos de las vidas de sus «investigados». El análisis de cuanto acontece en el aula implica una interpretación explícita del significado y funciones de las acciones observadas, expresándolo a través de descripciones y explicaciones donde la cuantificación y el análisis estadístico desempeñan un papel secundario. En este tipo de investigaciones se tiende a trabajar con datos no estructurados, es decir, datos que no han sido codificados de acuerdo con un sistema de categorización o clasificación cerrado y propuesto con anterioridad.

En todo trabajo de investigación existe una dimensión interpretativa, la base esencial del informe de investigación en palabras de Denzin y Lincoln (1994), por lo que es importante profundizar en su significado antes de comenzar con el análisis del proceso de investigación. En relación con nuestro trabajo, podemos afirmar que nuestro interés no se reduce a comprender el trabajo de nuestros alumnos, sino que también queremos transformarlo, mejorarlo. Rompiendo las barreras entre la teoría (los investigadores) y la práctica (la escuela). Kemmis (1992) señala que esta es la única forma de contribuir inequívocamente a la mejora de la educación y que en ocasiones la investigación educativa no llega a cumplir con esta tarea porque no alcanza a comprender de manera adecuada la naturaleza y los problemas del cambio.

Con el objetivo de entender estos «problemas del cambio» optamos por un marco metodológico que nos permita adaptarnos a lo que acontece, suficientemente flexible para permitir la redefinición del fenómeno analizado. Es por esto que necesitaremos un marco que justifique nuestra acción en el aula: no basta con analizar entrevistas o el trabajo del alumno, pues este no puede proporcionarnos una visión tan intensa como la práctica en sí misma.

En la investigación cualitativa, una de las formas de observación más común es la «observación participante». Denzin nos propone la siguiente definición:

> «La observación participante se define como la estrategia de campo que combina simultáneamente los documentos de análisis, las entrevistas, la participación directa y la observación e introspección». (Denzin, 1989, pp. 157-158)

Mirar, escuchar, reflexionar y documentar. Se trata de cuatro técnicas fundamentales para comprender qué está pasando en torno a la resolución de problemas y por qué está pasando. La observación participante obliga a estar permanentemente atento a lo que sucede en el campo, observando activamente, y ejercitando la memoria para escribir notas de campo detalladas, reflejar las conversaciones captadas informalmente e interpretarlas desde la perspectiva de los protagonistas de la acción, la empatía emerge como un concepto elemental en la investigación cualitativa.

Igual de importante es lo que se observa, lo que se escucha y comparte, como lo que no se dice y el plano desde el que todo esto es analizado. Los silencios forman parte de esta dinámica, el silencio de los adultos en la sala en su papel de investigadores-observadores para permitir el discurso de los alumnos, para pasar desapercibidos, el silencio inicial de los alumnos al sentirse incómodos con la presencia del observador, el silencio de los alumnos cohibidos por el impacto que puedan tener sus respuestas.

La observación participante sin guías previas estructuradas permite captar la riqueza de lo que en cada situación ocurre. El investigador-observador se acerca al aula con una actitud abierta y libre de prejuicios, mostrando interés en aprender de los otros, sobre los otros y con los otros; siendo atento, auténtico y cuidadoso, mostrando respeto y empatía, haciendo uso de la memoria a corto plazo y siendo muy consciente de la posibilidad de cometer errores y de sentir un choque cultural que puede producirse porque el investigador no conoce de inicio algunos de los significados simbólicos del centro escolar. En este sentido la permanencia sostenida en el tiempo dentro de la comunidad de estudio favorece que el investigador sea aceptado en dicha comunidad.

La investigación-acción y la investigación de diseño o investigación basada en diseño son una metodología y un paradigma metodológico, respectivamente[31], que están resultando ser de gran utilidad en el campo de la Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias (Kemmis, 2002; Kelly, 2003). En la primera, investigación-acción, los profesores parten de sus propios problemas e intereses prácticos y se busca la teoría como modo de ayudar a conocer y resolver estos problemas. Es una investigación hecha por profesores con el objetivo de mejorar su propia práctica. En la segunda, la investigación de diseño, se parte de los intereses de los investigadores, de ajustar planteamientos teóricos más generales a modelos locales, teniendo en cuenta la especificidad de los contextos en los que se ponen en práctica. El objetivo final no se presenta de inicio como la respuesta a un problema sino que se plantea desarrollar un producto particular y recoger información sobre el proceso de diseño que a su vez aporte información para abordar futuros diseños. Ambos son procesos cíclicos en espiral, pues un solo ciclo no es suficiente para alcanzar el potencial total de la acción de mejora, en el caso de la investigación-acción, ni para caracterizar la situación de aprendizaje en toda su complejidad que permita diseñar un entorno de aprendizaje eficaz en el caso de la investigación de diseño.

Las fases de la investigación-acción pueden resumirse gráficamente en el modelo de ciclos de Kemmis y McTaggart (1982), Kemmis (1992), de la figura 1.4, donde se muestra el ciclo concreto seguido en esta investigación: planificar-actuar-observar-reflexionar-revisar; que

[31]Un paradigma metodológico permite el uso de diferentes metodologías.

se traducen en los ciclos iterativos de diseño-implementación-análisis y rediseño de las investigaciones de diseño.

Cada una de las etapas de uno de estos ciclos es, tal y como afirman Carr y Kemmis (1988), prospectiva con respecto a la siguiente, a la vez que es retrospectiva con respecto a la anterior. Esto significa que cuando estamos planificando, lo que estamos haciendo es prever un plan de acción para la etapa siguiente en base a la experiencia previa. Nos encontramos entonces con dos dimensiones interrelacionadas: una organizativa y otra estratégica. Así por ejemplo: el análisis, la interpretación o el estudio de los hechos o acontecimientos está vinculado con la planificación y la reflexión; mientras que la práctica en el contexto social, es decir, la intervención o la participación del investigador en el entorno escolar está relacionada con la observación y la acción.

4.1. La investigación-acción

Contreras (1194) considera la investigación en la acción como una forma de entender la enseñanza, no solo de investigar sobre ella. La metodología Investigación-Acción convierte la práctica en objeto de investigación de manera que conocer y actuar forman parte de un mismo proceso de exploración.

La práctica educativa no se entiende como un instrumento, como un conjunto de acciones dirigidas a unos resultados, sino como un medio para mejorar la calidad. La investigación-acción es concebida como un proceso que da poder político a los participantes, pues los profesionales en ejercicio se constituyen en reformadores de la educación, revisan la forma de entender la práctica educativa y las pretensiones que tienen sobre ella.

Un rasgo específico de la investigación-acción frente a los enfoques de investigación más tradicionales es la forma en la que genera conocimiento: no desliga el problema de comprender del de preguntarse por lo que se debe hacer y cómo hacer pues tiene la pretensión de mejorar tanto las cualidades internas de la práctica como las condiciones en las que esta tiene lugar. Rompe la barrera entre teoría y práctica.

Un metodología investigadora centrada en el estudio y transformación de la práctica deviene de forma natural en diferentes concepciones o tipos de acuerdo con los aspectos ideológicos. Una de las tipologías más difundidas es la que establece tres tipos de investigación-acción: técnica, práctica y crítica (Holly, 1984 y Grundy 1982, 1991):

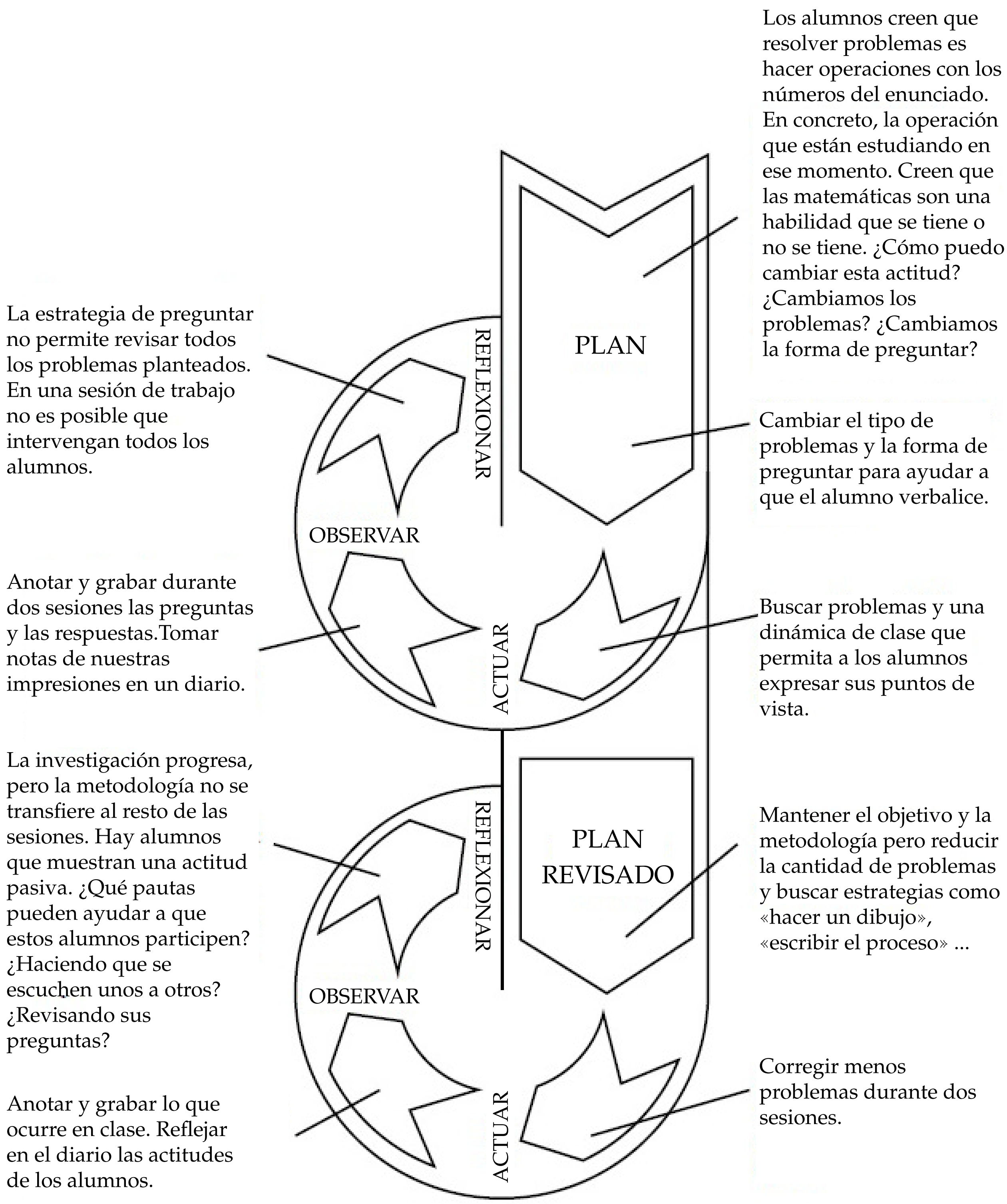


Figura 1.4: Espiral de ciclos para esta investigación. Adaptación del modelo de Kemmis y McTaggart (1988).

- La investigación-acción técnica. Su propósito es hacer más eficaz la práctica educativa y contribuir a la formación del maestro mediante la participación de este en una investigación diseñada por diseñadas por un experto o equipo, en los que aparecen preestablecidos objetivos y orientaciones metodológicas. El tipo de conocimiento que genera es de carácter «técnico» con el objetivo de mejorar las acciones y la eficacia del sistema. Para Contreras (1994) este modelo no se atiene estrictamente a las características de una investigación-acción pues hace de los maestros ejecutores de prescripciones externas.

- La investigación-acción práctica. Los maestros seleccionan el problema a investigar y llevan el control del proceso, adquieren un protagonismo activo y autónomo. Genera conocimientos eminentemente práctico y tiene por fin comprender la realidad, indagar y reflexionar sobre esta.

- La investigación-acción crítica. Se centra en la praxis educativa, no es suficiente con replantearse la práctica sino que es necesario plantearse la transformación del contexto social en el que se desenvuelve. Tiene por finalidad generar conocimiento emancipativo.

Dentro del enfoque metodológico de la investigación-acción se enmarcan diferentes paradigmas o modelos, todos ellos coincidentes en muchos aspectos pero también con diferencias metodológicas y epistemológicas de acuerdo a la época y la circunstancia en las que se originaron. Por ahora nos centraremos en el que consideramos más adecuado para los propósitos de nuestro estudio. La investigación de diseño.

4.2. La investigación de diseño

La investigación de diseño o investigación basada en diseño (IBD o DBR por sus siglas en inglés) es un paradigma de investigación constructivista de naturaleza principalmente cualitativa. No impone directrices en cuanto a los métodos de investigación, por lo que se pueden utilizar diferentes metodologías de análisis. Su objetivo es analizar el aprendizaje en su contexto natural, en el marco del aula, con el propósito de incidir en él:

> «se persigue documentar qué recursos y conocimiento previo ponen en juego los alumnos en las tareas, cómo interaccionan los alumnos y profesores, cómo son creadas las anotaciones y registros, cómo emergen y evolucionan las concepciones, qué recursos se usan y cómo es llevada a cabo la enseñanza a lo largo del curso de la instrucción; todo ello mediante el estudio del trabajo de los alumnos, grabaciones de vídeos y evaluaciones de la clase». (Confrey, 2006, p. 137)

Este paradigma se caracteriza por la interdependencia entre el diseño de las acciones, la instrucción que se planifica y la investigación.

A partir de Rinaudo y Donolo (2010), Molina (2006) y Molina, Castro, Molina y Castro (2011), sintetizamos las características de los proyectos enmarcados en este paradigma en los siguientes puntos:

- La decisión expresa de ubicar la investigación en el contexto natural en que ocurren los fenómenos estudiados. En nuestro caso concreto en las aulas de clase, aulas que se pueden calificar de «comunes» en el sentido de que no son aulas donde se suponen «las mejores prácticas».

- El propósito de producir cambios específicos en ese contexto. La investigación en sí misma se convierte en una intervención en el aula: aporta información sobre cómo implementar la práctica, explica por qué el diseño inicial funciona y, de no ser así, sugiere formas sobre cómo puede ser adaptado para lograr la meta pedagógica explícitamente definida. Es un proceso de ciclos continuos: diseño-práctica-análisis-rediseño (Coob, Stephan y McClain 2010; Collins, 1992; Collins, Joseph y Bielaczyc, 2004; citado por Molina et al., 2011). Esta estructura cíclica implica dos tipos de análisis de datos: análisis continuados durante la intervención y un análisis final retrospectivo del conjunto de los datos recogidos.

- Se centra en la caracterización del aprendizaje desde un enfoque sistémico: las variables a estudiar son múltiples y muchas de ellas no pueden ser controladas, se hace necesario especificar cuáles serán objeto de estudio y cuáles se asumen como condiciones de contorno. No se pretende controlar, sino identificar las variables que caracterizan la situación (Gross, 2007).

El grupo de investigadores Desing-Based Research Collective (DBRC) sintetiza los propósitos de este enfoque de la siguiente manera:

> «[La investigación basada en diseño] nos ayuda a entender las relaciones entre la teoría educativa, la herramienta diseñada y la práctica. El diseño es central en los esfuerzos para mejorar el aprendizaje, crear conocimiento útil y avanzar en la construcción de teorías sobre el aprendizaje y la enseñanza en ambientes complejos». (DBRC, 2003, p. 5)

Este mismo grupo identifica cuatro áreas en las que consideran que este paradigma metodológico puede aportar mayores beneficios (DBRC, 2003, p. 7[32]):

- Exploración de las posibilidades de nuevos constructos e ideas. La puesta en marcha de estos en una situación real con toda su complejidad permite a los diseñadores entender las demandas y constricciones que operan sobre sus diseños.
- Desarrollo de teorías contextualizadas sobre enseñanza y aprendizaje.
- Construcción de conocimiento acumulativo sobre el diseño de este tipo de experiecias. Kelly (2004) refuerza este aspecto al señalar la capacidad de estos estudios como generadores de cuestiones que pueden ser abordadas por otras técnicas de investigación, o directamente como incubadoras de nuevas técnicas de investigación.
- Potencian la capacidad humana para innovar.

El complejo campo de acción en el que se desarrollan estas investigaciones es también fuente de las debilidades de este paradigma investigador. Por ejemplo, hay variables que no están o no pueden ser controladas, el manejo de diversas fuentes y datos puede hacer difícil su análisis y muy complejo el proceso de comparar y contrastar diferentes diseños, el problema de delimitar el origen del conocimiento que los investigadores adquieren durante el proceso puede ser también muy complicado (Kelly, 2004).

Los experimentos de diseño basados en una conjetura (Confrey y Lachance, 2000) se caracterizan por la evolución constante de la conjetura a medida que la investigación va desarrollándose. La conjetura, entendida como «inferencia basada en pruebas incompletas y no concluyentes», es la guía de la investigación, no se formula una hipótesis para ser probada o refutada sino que se formulan objetivos y preguntas de investigación para las que se buscan respuestas.

[32]Este paradigma surge de la adaptación a las ciencias del aprendizaje de las metodologías de diseño propias de la Ingeniería y la Arquitectura.

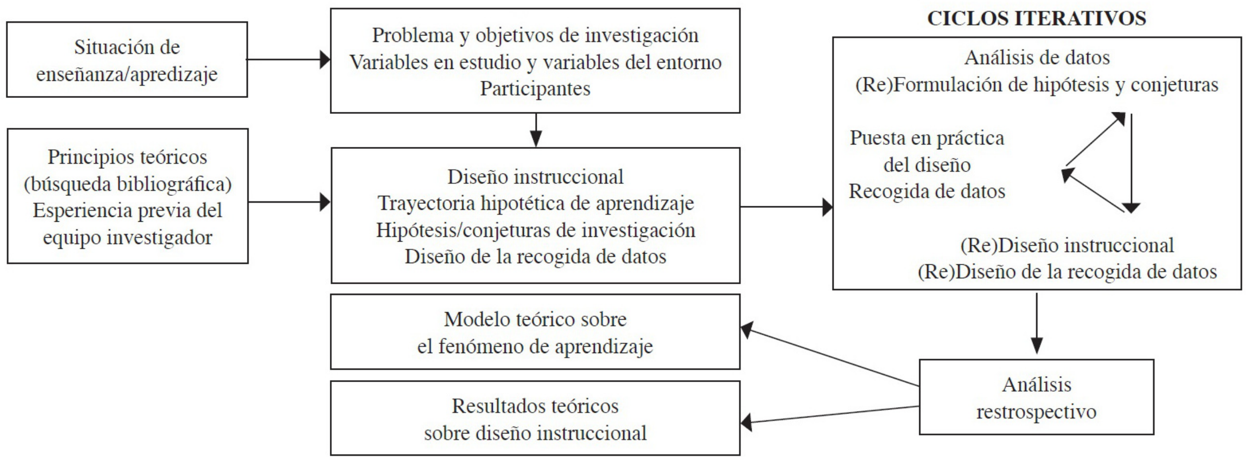


Figura 1.5: Estructura general de una investigación de diseño.(Fuente: Molina et al., 2011, p. 76)

El diseño de la investigación se organiza en torno a etapas bien definidas, que como ya hemos explicado tienen un carácter cíclico. Para cada una de estas etapas se han de definir las acciones a ejecutar. Proponemos aquí el diseño del esquema adaptado a nuestra intervención a partir de Rinaudo y Donolo (2010) y Molina et al. (2011), esquematizado en la Imagen 1.5:

1. Preparación del experimento: en esta etapa hay que definir el problema y formular de manera explícita y detallada los criterios que lo sustentan.

    a) Definir el problema y los objetivos de la investigación.

    b) Describir las condiciones iniciales del contexto en el que se implementará la intervención. Examinar y describir la situación inicial (determinar los conocimientos iniciales de los alumnos; analizar las metodologías aplicadas en el aula hasta el instante de la intervención) para poder conocer cómo se van dando los avances.

    c) Definir las intenciones teóricas del estudio, ya sea comprobar una teoría existente o generar una nueva teoría.

    d) Elaborar el diseño instructivo: la metodología (el modo y los medios) a aplicar en función de los conocimientos previos detectados, los objetivos planteados y los condicionantes temporales.

e) Diseñar la recogida de datos.

2. Implementación del experimento de diseño: se lleva a cabo la implementación de la secuencia instructiva diseñada. Se van realizando ajustes continuos del diseño: el diseño inicial va adecuándose en función de la dinámica y el contexto mediante una secuencia iterativa de microciclos de diseño y análisis (Gravemeijer y Cobb, 2006).

   a) Antes de la intervención: obtener información sobre el trabajo previo realizado que ayude a interpretar los datos.

   b) Elaborar hipótesis sobre los resultados que se quieren obtener.

   c) Definir los procesos de recogida de datos.

3. En cada intervención: modificar sobre la marcha en función de las condiciones de contorno, si es necesario, el diseño de la intervención. Recoger datos de todo cuanto acontece en el aula.

4. Después de cada intervención: análisis detallado de lo que ha acontecido en el aula, de los datos recogidos, y diseño de la siguiente intervención. Revisión y reformulación de la conjetura en caso de necesidad.

5. Análisis retrospectivo: concluida la intervención se inicia esta etapa que incluye como tareas principales:

   a) Análisis de los datos recolectados en etapas previas, mediante ciclos iterativos. En el primer ciclo de análisis retrospectivo se consideran los datos cronológicamente, revisando episodio por episodio. Las interpretaciones de un episodio se comparan con los datos del episodio siguiente con el propósito de decidir si deben ser confirmadas o refutadas. Estas interpretaciones sobre los episodios se constituyen en datos para un segundo ciclo de análisis para tomar decisiones frente a dos o más hipótesis en competencia.

   b) Identificar la ruta de aprendizaje seguida por el grupo o por cada alumno a partir de los cambios que puedan ser apreciados.

Aun así, esta investigación no se adapta completamente a los parámetros de los «experimentos de enseñanza», puesto que:

- No se constituye un equipo de trabajo que esté a cargo de la investigación; el trabajo lo desarrolla una única investigadora a quien las maestras del aula han ayudado a contrastar las observaciones tomadas en el aula y a evaluar los cambios en las actitudes de los alumnos.

- El trabajo de recogida de datos, ajuste del marco teórico, diseño de intrumentos, validación y contraste de la conjetura de investigación, los criterios de análisis de datos y reflexiones realizadas han recaído en la investigadora.

- No se busca construir una teoría sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollado en el aula, ni se han analizando las interacciones entre docente, alumnos y constructos diseñados para la transformación del proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas.

- No se elige un concepto matemático concreto del currículo como objeto de estudio.

Lo que pretende aportar esta investigación es la contribución al desarrollo de actitudes favorables y competencias matemáticas por parte de alumnos de primaria, a través de la resolución de un conjunto variado de problemas, así como la construcción de conocimiento sobre este proceso por nuestra parte. De aquí se desprende otra diferencia de matiz fundamental con respecto a los experimentos de diseño. Y es que el propósito último de esta investigación no es diseñar un constructo y refinarlo a partir de su aplicación práctica (Molina et al. 2011), sino transformar una práctica docente insatisfactoria, a través de un diseño instruccional (constructo) creado para tal fin.

Hasta aquí hemos mostrado los marcos teórico y metodológico en el que encuadrar esta investigación, en el siguiente capítulo abordamos el análisis y definición de las herramientas que nos permitirán examinar y describir la situación inicial en las aulas para poder conocer cómo se van dando los avances y concretar el diseño instructivo en función del análisis de esta situación inicial, los objetivos planteados y las condiciones temporales.

Capítulo 2

Análisis del proceso de resolución de problemas basado en las preguntas liberadas de TIMSS 2011

1. Introducción

En este capítulo se recogen los resultados obtenidos del análisis de las intervenciones en las aulas de cuarto y quinto de Educación Primaria sobre un subconjunto de las preguntas liberadas del estudio *Trends in International Mathematics and Science Study* edición del año 2011 (TIMSS 2011).

Nuestro interés en esta prueba radica en conocer tanto a nivel individual como global el grado de adquisición y desarrollo por parte del alumno de los conceptos y competencias definidas en el currículo y su transferencia a la resolución de problemas.

Clasificaremos los errores detectados a partir del modelo de análisis de errores propuesto por Newman (Newman, 1977, 1983; Clements, 1980; White, 2010; Wyjaya, Heuvel-Panhuizen, Doorman y Robitzsch, 2014). Y con ello obtendremos una visión sobre el grado de conocimiento y transferencia de conceptos fundamentales del currículo: números naturales, fracciones, reconocimiento de patrones, reconocimiento de figuras, lectura de gráficos, etc. Identificaremos los procedimientos empleados por los alumnos, cuáles les conducen a respuestas correctas y cuáles no. Con la visión de conjunto que todo ello nos proporcione diseñaremos una línea de actuación para los problemas que vamos a proponer en las aulas de tercero y cuarto de Educación Primaria.

Podemos resumir en cuatro puntos las características comunes de todas las sesiones de trabajo planteadas en esta investigación:

- Son sesiones en las que se proponen problemas que aumentan la demanda cognitiva de los alumnos frente a las sesiones tradicionales.
- Los problemas están planteados para que los alumnos trabajen como «trabajan los matemáticos»: emiten hipótesis, que son probadas y contrastadas, se plantean cuestiones a partir de lo trabajado, etc.
- Se busca ampliar la base conceptual trabajada en clase. Los alumnos tienen que saber dar respuesta a preguntas como «¿qué significa este número?», «¿por qué funciona este procedimiento?», «¿por qué aplicas esta operación?», «¿cómo podemos demostrar que esto funciona en otros casos?», «¿funciona en todos los casos?».
- La sesión de resolución de problemas es un espacio en el que los alumnos hablan y actúan. La maestra y la profesora-investigadora escuchan y plantean preguntas.

Nuestro sistema educativo contempla distintas pruebas de evaluación a lo largo de las diferentes etapas educativas. Y las pruebas, a su vez, responden a un amplio espectro de características (centradas en la adquisición de los contenidos del currículo o en la evaluación de las competencias adquiridas, son de carácter censal o de tipo muestral, presentan un diseño único para todo el ámbito nacional o están particularizadas en base a la organización territorial, etc.). Nos vamos a centrar en la prueba TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study: Estudio de Tendencias Internacionales en Matemáticas y Ciencias*) porque es un estudio de carácter curricular, de tipo muestral, y del que se dispone de resultados detallados y públicos para el conjunto del país.

Los objetivos y temas que cubre la prueba TIMSS se organizan en marcos de referencia que están en concordancia con los currículos vigentes en los países participantes. Se trata de una prueba validada y estandarizada para la que comprobamos que los resultados obtenidos en esta investigación en las clases de 4.º de Educación Primaria están, en términos estadísticos, alineados con los de la muestra nacional. A continuación, consideramos estas preguntas como indicadores fiables a partir de los cuales indagar sobre los procesos de razonamiento, errores conceptuales y obstáculos en la resolución de problemas que muestran los alumnos participantes en esta investigación.

Las respuestas justificadas de los alumnos y las entrevistas realizadas nos aportan evidencias sobre sus procesos de razonamiento y muestran el desajuste entre lo que se pretende aprender y lo que realmente se aprende. En el estudio nos interesa también analizar las respuestas obtenidas a estas mismas cuestiones en otros niveles educativos, por lo que estos problemas se trabajan con alumnos de 5.º de Educación Primaria[1]. Comprobamos que los errores conceptuales y problemas de transferencia detectados se mantienen.

Los resultados referidos a las estrategias y su evolución están analizados por dominios cognitivos y de contenidos. Se incluye la descripción de las estrategias observadas para cada tipo de problema, y cómo estas permiten establecer relaciones con niveles de comprensión y variedad de representaciones[2]. Clasificamos el tipo de errores, la frecuencia con la que aparecen y analizamos si existe correlación entre el tipo de error y los dominios cognitivo y de contenidos evaluados en la prueba.

En este capítulo establecemos los marcos teóricos de la prueba y del análisis de errores aplicados a las respuestas de los alumnos, diseñamos dos tipos de pruebas a partir de las preguntas liberadas de TIMSS 2011 (el Test I y Test II de ahora en adelante), exponemos los resultados del análisis de los errores encontrados y proponemos pautas de actuación para trabajar sobre ellos.

[1]Contamos también con resultados en 6.º de Educación Primaria, pero la muestra es pequeña y estamos trabajando para poder ampliarla.

[2]Desde el enfoque propuesto por las investigaciones sobre representaciones hay que hacer notar que esta prueba no está específicamente diseñada para «detectar posibles bloqueos y errores generales que se manifiestan en los alumnos en lo referido al reconocimiento de un objeto matemático a través de diferentes registros de representación, así como en la conversión entre los mismos para afrontar y resolver situaciones en contextos cercanos a ellos»(Macías, 2015, cap. 3, p. 225). Gracias a las entrevistas con los alumnos y cuando estos exponen sus trabajos es como estas preguntas evidencian estos problemas.

2. Marco teórico TIMSS

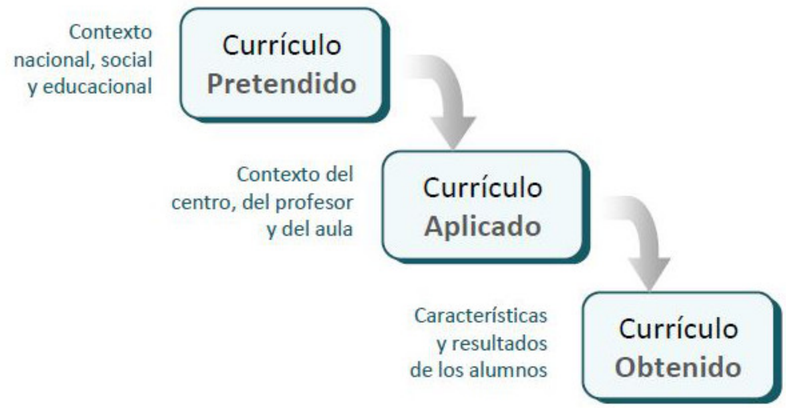
La evaluación TIMSS[3] es un estudio organizado por la IEA (*International Association for the Evaluation of Educational Achievement*). TIMSS 2015 es el más reciente de la serie para medir los logros de los estudiantes de 4.º y 8.º grado, equivalentes a cuarto de Educación Primaria y segundo de Educación Secundaria en el sistema español, en las áreas de matemáticas y ciencias en el ámbito internacional. La primera edición de TIMSS tuvo lugar en 1995, y desde 1999[4] se realiza cada cuatro años (2003, 2007, 2011 y 2015).

La población evaluada la forman muestras representativas del alumnado de 4.º y 8.º grado de cada país participante. No obstante, cada país puede realizar el estudio en ambos o en un solo grupo de población, y puede además ampliar las poblaciones evaluadas de tal forma que se puedan analizar datos no solo a nivel nacional sino también regional. España ha tomado parte en las ediciones de 1995, 2011 y 2015. En la edición de 2011, España decidió aplicar sólo la evaluación en 4.º de Educación Primaria, y en ella participaron 4183 alumnos de 151 centros diferentes, y 200 profesores. Mientras terminábamos este estudio se publicaron los resultados de la edición de 2015. En ella, varias comunidades autónomas ampliaron muestras, con el fin de obtener resultados más detallados.

El estudio TIMSS se fundamenta en la consideración de que es posible comprender los elementos que influyen en el aprendizaje de las matemáticas y las ciencias mediante un cuidadoso análisis del rendimiento de los alumnos, las metodologías didácticas de sus profesores y los recursos disponibles en el aula. Para TIMSS el currículo es el principal concepto organizador del proceso de enseñanza y aprendizaje, y puede ser considerado como uno de los factores explicativos que subyacen al rendimiento de los alumnos (Robitaille y Garden, 1996; citado por Martin, 1996 al tiempo que regula las oportunidades educativas que se les brindan. Desde esta perspectiva TIMSS considera tres aspectos o

[3]En su origen TIMSS respondía al acrónimo de *Third International Mathematics and Science Study*, un proyecto de evaluación internacional del aprendizaje escolar en matemáticas y ciencias realizado por la *International Association for the Evaluation of Educational Achievement* (IEA), que se aplicó en 1995 (Beaton et al., 1996; Martin et al., 1997; Mullis et al., 1998). En 1995 la Asamblea General de la IEA decidió hacer sus evaluaciones de manera regular cada cuatro años, volvió a aplicarse en 1999 con el nombre de TIMSS Repeat (Martin et al., 2000). En el año 2003 cambió su nombre a *Trends in International Mathematics and Science Study*, pero manteniendo el acrónimo que lo identifica, por lo que este se conoce también como TIMSS Trends (Mullis et al., 2002) en la bibliografía fechada en torno al año 2000. Desde la edición de 2003 es usual referirse a ella con el acrónimo acompañado del año en el que tiene lugar; por ejemplo, TIMSS 2011 y TIMSS 2015.

[4]En las ediciones de 1995 y 1999 solo participaron alumnos de 12 y 13 años.



Fuente: TIMSS-2011-Marcos de Evaluación. Disponible en http://goo.gl/oOGmZY.

Figura 2.1: Modelo curricular TIMSS.

niveles de currículo (imagen 2.1) (IEA, 1995a, 1999a, 2003a, 2007a, 2011a; López-Varona y Moreno-Martínez, 1997; Vázquez, 2000; Mullis et al., 2002):

i. El currículo pretendido o currículo oficial del país: el que se planifica por parte de las autoridades educativas y que no solo muestra las matemáticas y ciencias que explícitamente se espera que aprendan sus alumnos sino también la organización del sistema educativo, pues se entiende que esta responde al deseo de facilitar este aprendizaje.

ii. El currículo aplicado: el que se enseña en el aula, quién lo enseña y cómo lo enseña.

iii. El currículo alcanzado: lo que finalmente han aprendido los alumnos y su opinión sobre las matemáticas y las ciencias.

El desarrollo de los marcos de evaluación o marcos de referencia para cada una de las ediciones TIMSS se inicia con la actualización de los marcos de referencia usados en las ediciones anteriores y se busca que reflejen los cambios curriculares que hayan podido tener lugar en la mayor parte de los países participantes y su adecuación al contexto propio de cada país. No hemos encontrado referencias oficiales sobre el grado de adecuación al caso español.

Cuando se describen los objetivos de la educación matemática, por lo general son dos las dimensiones que se presentan como claramente diferenciadas: la primera, definida por los contenidos, que determinarán el diseño de las tareas a realizar, y una segunda, la dimensión cognitiva, que contempla las capacidades o competencias cognitivas necesarias para solucionar estas tareas. Estas dos dimensiones configuran los estándares básicos o marco común de referencia, aunque se pueden encontrar diferentes interpretaciones sobre los mismos en cada país (véase estándares de aprendizaje evaluable de la LOE y la LOMCE en España, *Mathematics in Education in Europe: Common Challenges and National Policies*, o los *Principles and Standards for School Mathematics* de EE. UU.). A pesar de estas diferencias, en el desarrollo de los planes educativos estas tareas y capacidades aparecen jerarquizadas de acuerdo con la taxonomía de Bloom (Bloom, Engelhart, et al., 1956) o sus modificaciones más recientes (Anderson y Krathwohl, 2001; Marzano y Kendalle, 2008). Estos componentes también se han tenido en cuenta en las diferentes ediciones de TIMSS, pero tal y como sucede con las interpretaciones de los estándares también aquí se perciben ligeras variaciones de una edición a otra para adaptarse a los cambios que han tenido lugar en los países participantes. En la tabla 2.1 se recogen los distintos dominios de contenidos y el porcentaje para cada uno de ellos a lo largo de las diferentes ediciones de TIMSS para la etapa educativa de 4.º curso[5].

Tabla 2.1: Evolución temporal de la prueba TIMSS por bloque de contenidos.

	TIMSS 1995	TIMSS 1999	TIMSS 2003	TIMSS 2007 TIMSS 2011 TIMSS 2015
Bloques de contenidos	Números (30%)	Fracciones y números (30%)	Números (40%)	Números (50%)
	Fracciones y proporcionalidad (10%)			
	Medida, estimación y sentido numérico (10%)	Medida (15 %)	Medida (20%)	
	Geometría (15%)	Geometría (15%)	Geometría (15%)	Formas y mediciones geométricas (35%)
	Datos, representación, análisis y probabilidad (15%)	Representación de datos, análisis y probabilidad (15%)	Datos (10%)	Representación de datos (15%)
	Patrones, relaciones y funciones (20%)	Álgebra (25%)	Patrones, ecuaciones y relaciones (15%)	

Fuente: elaboración propia, a partir de datos de la Encyclopedia TIMSS.

[5]En TIMSS 1995 y TIMSS 1999 participan alumnos de 13 y 14 años, y por ello aparecen bloques de contenidos como Álgebra y Probabilidad.

2.1. Bloques o dominios de contenidos matemáticos de TIMSS 2011

Desde la edición TIMSS 2007 el marco de evaluación de contenidos ha quedado establecido en los bloques de números, las formas y mediciones geométricas y la representación de datos. Para el caso concreto de TIMSS 2011 las actualizaciones se basaron en las recomendaciones aportadas por los expertos en el área de Matemáticas designados por cada país y recogidas durante las revisiones de los datos de TIMSS 2007 junto con la información de TIMSS 2007 Encyclopedia[6] y TIMSS 2007 International Mathematics Report. En base a ellos cada bloque se organiza en sub-bloques para los que se concretan objetivos específicos expresados en términos de comprensión y destrezas que un alumno de 4.º curso debe haber adquirido (tabla 2.2). Los sub-bloques y los objetivos se enumeran a continuación, indicando aquellos que desde nuestro punto de vista guardan relación con la resolución de problemas:

- En el bloque de contenidos «Números» se contemplan cuatro categorías o subdominios: números naturales, fracciones y decimales, expresiones numéricas con números naturales y modelos y relaciones. Para cada uno de ellos se trabaja la resolución de problemas.

- En el dominio de «Formas y medidas geométricas» se consideran dos áreas temáticas: puntos, líneas y ángulos y formas bidimensionales y tridimensionales. En este dominio se pone más énfasis en conocer y aplicar que en el razonamiento y resolución de problemas. De hecho, no aparece ninguna mención a la resolución de problemas en los descriptores del marco teórico. Por otro lado, en el currículo de nuestro país tampoco se trabaja el área de geometría desde los aspectos del razonamiento y establecimiento de relaciones, que son los más vinculados a la resolución de problemas.

- La «Representación de datos» se articula en dos áreas temáticas: lectura e interpretación de datos y organización y representación. Los alumnos deben ser capaces de hacer uso de la información facilitada por los datos para contestar a preguntas que

[6]La Encyclopedia TIMSS es la publicación que proporciona datos de todos los países participantes, fundamentalmente relativos al sistema educativo y, en particular, al currículo de la Educación Primaria y el lugar que en él ocupa la enseñanza de las matemáticas y las ciencias. Los datos de la Encyclopedia se obtienen mediante un cuestionario a las autoridades sobre el currículo escolar de matemáticas y ciencias. Se pueden consultar en http://timssandpirls.bc.edu/timss2011/encyclopedia-timss.html.

van más allá de la lectura y representación directa de estos. Podemos interpretar estos ejercicios como problemas.

Tabla 2.2: Dominio de contenidos en Matemáticas y ejemplos de capacidades evaluadas.

Áreas temáticas	Ejemplo de capacidades evaluadas
Números naturales	▪ Calcular con números naturales ($+$, $-$, $\times$, $\div$) y estimar dichos cálculos. ▪ Conocer el valor posicional de las cifras, reconocer y escribir números de forma expandida, y saber representar los números naturales con palabras, diagramas o símbolos. ▪ Comparar y ordenar números naturales. ▪ Resolver problemas cotidianos que implican mediciones, dinero y proporciones sencillas.
Fracciones y decimales (dos decimales, máximo)	▪ Reconocer las fracciones como partes de unidades enteras o de una colección y representarlas utilizando palabras, números o modelos. ▪ Identificar fracciones equivalentes; compararlas y ordenarlas, sumar y restar fracciones simples. ▪ Mostrar la comprensión del valor del lugar decimal, sumar y restar con decimales. ▪ Resolver problemas que impliquen fracciones simples o decimales.
Expresiones numéricas con números naturales	▪ Encontrar el número o la operación que falta en una expresión numérica (por ejemplo, $17 + \square = 29$). ▪ Empleo de expresiones numéricas con incógnitas en la resolución de problemas simples.
Modelos y relaciones	▪ Ampliar o encontrar términos que falten en un modelo bien definido, describir las relaciones entre términos adyacentes en una secuencia y entre la expresión numérica del término y el propio término. ▪ Escribir o seleccionar una regla para una relación dados ciertos pares de números naturales que satisfacen la relación, y generar pares de números naturales que siguen una regla dada (por ej., multiplicar el primer número por 3 y añadir 2 para obtener el segundo número).

Tabla 2.2: Dominio de contenidos en Matemáticas y ejemplos de capacidades evaluadas.

Áreas temáticas	Ejemplo de capacidades evaluadas
Puntos, líneas y ángulos	▪ Medir y estimar longitudes. ▪ Identificar y describir líneas paralelas y perpendiculares. ▪ Comparar el tamaño de los ángulos y dibujarlos (por ejemplo, un ángulo recto, ángulos mayores o menores que un ángulo recto). ▪ Localizar puntos en un plano a partir de coordenadas informales, medir distancias a partir de escalas informales.
Formas bidimensionales y tridimensionales	▪ Identificar, clasificar y comparar figuras geométricas comunes (por ej., por forma y tamaño). ▪ Recordar, describir y utilizar propiedades elementales de las figuras geométricas, incluyendo la simetría lineal y rotacional. ▪ Reconocer relaciones entre formas tridimensionales y sus representaciones bidimensionales. ▪ Calcular áreas y perímetros de cuadrados y rectángulos; determinar y estimar áreas y volúmenes de figuras geométricas (por ejemplo, cubriendo una forma dada o rellenando con cubos).
Lectura e interpretación de datos	▪ Leer datos directamente de tablas, pictogramas, gráficos de barras y de sectores. ▪ Comparar la información de conjuntos de datos o sus representaciones (por ejemplo, sobre los sabores de helado que prefieren los alumnos de una clase). ▪ Utilizar representaciones de datos para contestar a preguntas que vayan más allá de la lectura de tales datos (por ejemplo, combinarlos, realizar cálculos, efectuar inferencias y extraer conclusiones).
Organización y representación	▪ Comparar y hacer corresponder diferentes representaciones del mismo conjunto de datos. ▪ Organizar y representar datos utilizando tablas, pictogramas y gráficos de barras.

Fuente: PIRLS - TIMSS 2011. Volumen I: Informe Español[7].

En el documento TIMSS-Framework se detallan los estándares de evaluación para cada uno de estos bloques y que sintetizamos a continuación en términos de bloques de contenido y dominio cognitivo tal y como han sido considerados para la selección de las preguntas que configuran el Test I y el Test II elaborados para esta investigación.

El conocimiento de los números naturales es la componente principal de las operaciones con números (Mullis, Mullis, Martin, Ruddock, O'Sullivan, y Preuschoff, 2009). La habilidad para trabajar con ellos, el sentido numérico, fluidez de cálculo y la comprensión de las operaciones y cómo estas se relacionan entre sí constituyen la base de las matemáticas (Mullis et al., 2009). Los alumnos de 4.º curso de Educación Primaria deben ser capaces de mostrar una comprensión alta del valor posicional de las cifras, de las diferentes maneras de representar números y de las relaciones entre estos.

En el área de las fracciones comunes (así denomina TIMSS fracciones como $1/2$, $1/4$, $3/4$, etc.) y las decimales, se hace hincapié en la representación y traslación entre formas, en comprender las cantidades representadas por los símbolos y en el cálculo y resolución de problemas. En 4.º curso de Educación Primaria, los estudiantes deben ser capaces de trabajar con fracciones comunes, compararlas, operar y resolver problemas sencillos y de igual manera con los números decimales.

Estos niños deberían estar familiarizados con el estudio de series o modelos, explorando las relaciones entre los números que están en el modelo o que se utilizan para deducirlo.

Los alumnos de cuarto curso deben ser capaces de calcular con números naturales de tamaño razonable, estimar el resultado de las operaciones aritméticas básicas y saber hacer cálculos para resolver problemas. Los estudiantes también deben comprender los números para saber relacionar las unidades de medida y para convertir una unidad en otra.

En este nivel educativo no se consideran conceptos propiamente algebraicos, pero sí la comprensión de ecuaciones simples en forma de expresiones numéricas en las que hay que averiguar qué números son los que faltan en ella. Este tipo de preguntas sienta las bases del trabajo algebraico más formal.

[7] TIMSS 2011 Assessment Frameworks. Editado por: TIMSS & PIRLS International Study Center Lynch School of Education, Boston College. Copyright © 2009 by the International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA), Amsterdam, the Netherlands. Library of Congress Catalog Card Number: 2009903161

En el área de geometría se trabaja el sentido espacial, las propiedades de las figuras geométricas como longitud de los lados, tipos de ángulos, desarrollos planos de figuras tridimensionales, descomposición, combinación y análisis de una figura dada en otras más sencillas. Los alumnos de 4.º curso deben ser capaces de describir, visualizar e identificar figuras como triángulos, cuadriláteros y otros polígonos regulares e irregulares. Reconocer ejes de simetría, describir y aplicar rotaciones en el plano a una figura dada.

El bloque de datos incluye la recogida, el análisis y representación de datos en una variedad sencilla de formas (pictogramas, gráficos de barras y sectores circulares), la lectura e interpretación de gráficas y a partir de ellas responder preguntas. Los alumnos deben ser capaces de extraer conclusiones sobre diferentes representaciones de datos y comparar características.

2.2. Dominios cognitivos de matemáticas en TIMSS 2011

El marco teórico de TIMSS 2011 contempla tres dominios cognitivos: conocer, aplicar y razonar. Para cada uno de los dominios conceptuales la prueba contempla ítems de conocimiento, aplicación y razonamiento. La tabla 2.3 muestra los porcentajes para cada dominio cognitivo de la prueba de 4.º curso.

Tabla 2.3: Evolución temporal de la prueba TIMSS por dominios cognitivos.

	TIMSS 1995 TIMSS 1999	**TIMSS 2003**	**TIMSS 2007 TIMSS 2011 TIMSS 2015**
Dominios Cognitivos	Conocer hechos y procedimientos (15%)	Conocer hechos y procedimientos (20%)	Conocer (40%)
	Aplicar conceptos (20%)	Aplicar conceptos (20%)	Aplicar (40%)
	Resolver problemas rutinarios (40%)	Resolver problemas rutinarios (40%)	
	Razonar (25%)	Razonar (20%)	Razonar (20%)

Fuente: elaboración propia, a partir de datos de la Encyclopedia TIMSS.

El primer dominio, conocer, cubre los hechos básicos, procedimientos y conceptos que un alumno de 4.º curso de Educación Primaria necesita saber (Mullis et al., 2009). Este es el nivel más básico y presupone un aprendizaje asociativo en el que la comprensión, la memorización simple y la práctica con ejercicios sencillos son esenciales (Siegler, 2005, pp. 197-212). Sin ellos no es posible plantearse el pensamiento matemático con la finalidad de resolver problemas. La mayor parte de los ejercicios que contemplan nuestros libros de texto y, por tanto, la práctica más extendida en nuestras aulas, se corresponde con este dominio.

El conocimiento factual, o de hechos, engloba el conocimiento del lenguaje básico matemático, definiciones, propiedades y pequeñas cantidades de información referentes a detalles específicos; sin ellos no se pueden construir los cimientos del pensamiento matemático.

Los procedimientos abarcan el conjunto de normas generales, algoritmos, técnicas y heurísticas que sirven de puente entre el conocimiento factual y la resolución de problemas. Los alumnos tienen que saber que pueden utilizar procedimientos concretos para resolver problemas, que estos son diversos y que hay un subconjunto de los mismos que permitirá resolver tipos concretos de problemas.

Por último, el conocimiento de los conceptos les permitirá establecer categorías y conexiones entre ellas para ir más allá de lo que saben, pudiendo llegar a crear y analizar representaciones matemáticas.

La tabla 2.4 muestra las actividades asociadas a este dominio cognitivo.

El segundo dominio, aplicar, se centra en la capacidad para utilizar los conocimientos adquiridos en el nivel anterior y evalúa si se ha alcanzado el grado de comprensión conceptual necesario para resolver problemas rutinarios. Este dominio está alineado con las tareas más comunes realizadas en clase, esto es, el currículo aplicado, e implica, por tanto, la selección y aplicación de hechos, conceptos y procedimientos ya aprendidos. La tabla 2.5 muestra las actividades y capacidades que comprende este dominio cognitivo.

La mayoría de las tareas de matemáticas realizadas en el aula de Primaria se ajustan a estas dos habilidades. Para dar una respuesta correcta a ellas es necesaria una lectura comprensiva del texto a partir de la cual el alumno construye su propia representación mental del problema y selecciona las operaciones matemáticas apropiadas y el formato adecuado para la respuesta escrita solicitada en la prueba (Duval, 2006; Krutetskii, 1976; Mullis, Martin y Foy, 2013, pp. 67 - 108).

Tabla 2.4: Procedimientos concretos necesarios para la resolución de problemas dentro del dominio cognitivo conocer.

Recordar	Recordar definiciones; vocabulario; unidades; hechos numéricos; propiedades de los números; propiedades de las figuras planas; convenciones matemáticas (p.ej., notación algebraica como: a x b = ab, a + a + a = 3a).
Reconocer e Identificar	Reconocer objetos matemáticos, por ejemplo, formas, números, expresiones y cantidades; reconocer o identificar entidades matemáticas que sean equivalentes (p. ej., fracciones equivalentes conocidas, decimales y porcentajes; figuras geométricas simples orientadas de modo diferente).
Calcular	Conocer procedimientos algorítmicos para +, -, x, o una combinación de estas operaciones con números naturales, fracciones, decimales y enteros; números aproximados para estimar cálculos; llevar a cabo procedimientos algebraicos de rutina.
Recuperar	Recuperar información de gráficos, tablas y otras fuentes; leer escalas simples.
Medir	Usar instrumentos de medición; elegir unidades apropiadas de medida.
Clasificar y ordenar	Clasificar o agrupar objetos, figuras, números, expresiones e ideas según propiedades comunes; tomar decisiones correctas con relación a la pertenencia a una clase; ordenar números y objetos según sus atributos.

Fuente: elaboración propia, a partir de datos de la Encyclopedia TIMSS.

El tercer dominio, el razonamiento, implica la habilidad para emitir conjeturas y justificar los resultados a partir de lo observado. Es evaluado en la prueba mediante la solución de problemas rutinarios en situaciones no conocidas, contextos más complejos y problemas con múltiples etapas. Los alumnos a menudo tienen dificultades a la hora de resolver estas tareas no tanto porque carezcan de las bases necesarias sino porque no tienen una idea clara sobre cómo proceder. El razonamiento matemático implica la capacidad de pensamiento lógico y sistemático. Se espera de los alumnos de 4.º curso que empleen estrategias de carácter intuitivo y deductivo-inductivo basado en patrones y regularidades que se pueden utilizar para llegar a la solución de problemas no estándar. Este tipo de problemas requieren de la transferencia de conocimiento y competencias a situaciones nuevas,

Tabla 2.5: Procedimientos concretos necesarios para la resolución de problemas dentro del dominio cognitivo aplicar.

Seleccionar	Seleccionar o usar un método o estrategia eficiente para resolver problemas a partir de algoritmos y métodos de solución conocidos.
Representar	Representar información en diagramas, tablas, cuadros gráficos y generar representaciones equivalentes para una entidad o relación matemática dada.
Modelo	Generar un modelo apropiado, como una expresión matemática, una figura geométrica o un diagrama para resolver un problema estándar.
Poner en práctica	Seguir y poner en práctica un conjunto de instrucciones matemáticas, como por ejemplo dibujar formas y diagramas según unas determinadas especificaciones.
Resolver problemas de rutina	Resolver problemas como aquellos que se trabajan en clase independientemente de que estos se den en contextos conocidos o puramente matemáticos.

Fuente: elaboración propia, a partir de datos de la Encyclopedia TIMSS.

relacionadas o no con la vida real. La tabla t:c2t6 muestra las actividades asociadas con el dominio cognitivo razonar.

2.3. Diseño y características de la prueba TIMSS

Al diseñar el contenido de la prueba oficial de TIMSS 2011, el objetivo principal es asegurar la cobertura de los contenidos del marco teórico y evaluar al conjunto de los alumnos de un país o región. TIMSS no busca una evaluación individualizada para cada alumno que participa en la prueba. Esto da lugar a un gran número de preguntas, 175 para el área de Matemáticas y 172 para el área de Ciencias, una prueba exageradamente extensa si cada alumno tuviera que responder a la totalidad de las preguntas.

En la práctica, lo que se hace es distribuir el conjunto de preguntas de este banco original entre los alumnos, de forma que cada uno de ellos solo tenga que responder a un subconjunto de las preguntas. La totalidad de preguntas se distribuye en 14 bloques de

Tabla 2.6: Procedimientos concretos necesarios para la resolución de problemas dentro del dominio cognitivo razonar.

Analizar	Usar relaciones entre situaciones o elementos matemáticos a partir de la información dada.
Generalizar	Extender el dominio al que son aplicable los resultados encontrados. Resolver problemas a partir de resultadosmás generales.
Integrar Sintetizar	Establecer conexiones entre diferentes elementos del conocimiento y representaciones relacionadas entre ellos, establecer conexiones entre ideas matemáticas y combinar procedimientos para llegar a resultados. Combinar resultados parciales para llegar a un resultado ulterior.
Justificar	Facilitar pruebas de validez de una acción o de la corrección de un enunciado o resultado mediante propiedades o resultados matemáticos.
Resolver problemas no rutinarios	Resolver problemas que es muy poco probable que el alumno haya trabajado o encontrado en libros de texto al uso. Aplicar procedimientos matemáticos en contextos poco conocidos o complejos.

Fuente: elaboración propia, a partir de datos de la Encyclopedia TIMSS.

Matemáticas y otros 14 de Ciencias. Estos 28 bloques se organizan, a su vez, según un muestreo matricial en 12 cuadernillos. Cada alumno contesta solamente a cuatro de estos bloques, dos de Matemáticas y dos de Ciencias, cada bloque tiene 10 preguntas, por lo que el alumno contesta un total de 40 preguntas, 20 de Matemáticas y 20 de Ciencias en dos sesiones de 36 minutos cada una, separadas por un breve descanso[8]. De los cuatro bloques asignados a cada alumno, dos corresponden a ítems de nuevo desarrollo para la prueba de la edición en curso, uno de Matemáticas y otro de Ciencias, y otros dos corresponden a ítems de la prueba de la edición inmediatamente anterior, de igual modo uno de Matemáticas y otro de Ciencias. Dentro de una misma aula, la mitad de los alumnos empiezan por la prueba de Matemáticas y la otra mitad por la de Ciencias, y después del descanso completan la parte que tienen pendiente. Cada alumno contesta además un cuestionario sobre aspectos relacionados con su entorno familiar, el ambiente escolar, su auto-percepción y actitud hacia las Matemáticas y las Ciencias. Se prevé un máximo de

[8]Información más completa y detallada sobre el diseño y fiabilidad de la muestra disponible en Martin y Mullis (2012).

Tabla 2.7: Resumen de los contenidos en Matemáticas de TIMSS 2011.

<table>
<tr><th colspan="3">TIMSS 2011 Matemáticas</th></tr>
<tr><th colspan="2">Dominios de contenido</th><th>Dominios cognitivos</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Números

50 %</td><td>Números naturales</td><td rowspan="3">CONOCER. 40% Conocimiento de hechos y de procedimientos

Recordar – Reconocer – Identificar – Calcular –Recuperar - Medir – Clasificar – Ordenar</td></tr>
<tr><td>Fracciones y decimales</td></tr>
<tr><td>Expresiones numéricas</td></tr>
<tr><td>Modelos y relaciones</td><td rowspan="2">APLICAR. 40% Resolución de problemas habituales
Seleccionar – Representar – Interpretar – Aplicar - Verificar o comprobar</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Formas y mediciones geométricas

35 %</td><td>Puntos, líneas y ángulos</td></tr>
<tr><td>Formas bidimensionales y tridimensionales</td><td rowspan="2">RAZONAR. 20% Resolución de problemas no habituales. Actividades que implican razonamiento

Analizar – Generalizar – Justificar o demostrar</td></tr>
<tr><td>Representación de datos
15 %</td><td>Leer, interpretar y representar</td></tr>
</table>

Fuente: elaboración propia, a partir de datos de la Encyclopedia TIMSS.

30 minutos para completar este cuestionario.

Las preguntas tienen dos tipos de estructura: de elección múltiple (se facilitan cuatro opciones de las cuales solo una es correcta) o de respuesta abierta. La mayor parte de las preguntas van acompañadas de un enunciado con contenidos gráficos seguido de una pregunta, y en algunas ocasiones varias preguntas están asociadas a un mismo enunciado.

Una vez analizados los datos de las pruebas se hacen públicos los resultados y algunas preguntas que han formado parte del test. Estas cuestiones se conocen como ítems liberados y van acompañados de la guía de codificación con los indicadores de corrección y los resultados estadísticos (internacionales y nacionales) obtenidos en la prueba[9].

La tabla 2.7 muestra la distribución en términos porcentuales de los bloques de contenidos y cognitivos de la prueba TIMSS 2011. En esta edición, como ya hemos comentado, en

[9]En http://evaluacion.educalab.es/timsspirls/ están disponibles las preguntas liberadas.

España participaron 4183 alumnos de 151 centros y un total de 200 profesores tutores, lo que significa que han sido evaluados 200 grupos o aulas. La muestra es estratificada en términos de comunidades y titularidad de centros (públicos, privados y concertados) de forma que los resultados puedan considerarse representativos para el conjunto del Estado Español.

En TIMSS 2011, España logró 482 puntos, por debajo de la media de la OCDE (522 puntos), por debajo de la media de la UE (591 puntos) y por debajo de la media de los todos los países participantes (491 puntos)[10]. La diferencia de 40 puntos respecto a la media de los países de la OCDE no es homogénea respecto a los bloques de contenidos, disminuye a 34 puntos en el caso del bloque de Números, pero llega hasta los 47 puntos para los bloques de Geometría y Representación de datos. En las dimensiones cognitivas no hay variaciones significativas en la distancia de cada una de ellas a la media de la OCDE: 41 puntos menos en el dominio «Conocer», 39 puntos en «Aplicar» y 38 puntos en «Razonar».

3. Marco teórico sobre el análisis de errores

El error forma parte del proceso de enseñanza y aprendizaje y son muchos los estudios que avalan su valor pedagógico. Para el modelo constructivista el aprendizaje significativo se desencadena a partir de la detección de ideas previas, errores y preconceptos del alumno. Los errores actúan como «señales» de que algo se ha pasado por alto en el proceso de enseñanza y habría que subsanarlo cuanto antes (Borasi, 1987); en otras palabras, son marcadores sobre los que hay que actuar.

El estudio de errores en el aprendizaje de las matemáticas es una cuestión de permanente interés. Una vez más, las líneas de investigación son diversas y giran en torno a objetivos diferentes[11]. Estos estudios se han ido orientando en base a las corrientes psi-

[10] Los resultados obtenidos por estos alumnos se recogen en TIMSS 2011 International Results in Mathematics (Mullis et al., 2012) disponible en TIMSS 2011 webside (página oficial: http://timssandpirls.bc.edu/) y en PIRLS - TIMSS 2011. Estudio Internacional de progreso en comprensión lectora, matemáticas y ciencias. IEA.Volumen I: Informe español (Cap. 2, pág. 54 a).

[11] Rico (1995) identifica cuatro líneas de investigación: 1. Los trabajos centrados en el análisis, causas y taxonomías de clasificación. 2. Los estudios centrados en los organizadores curriculares; el error es uno de los que ha de tenerse en cuenta en el diseño de las unidades didácticas. 3. Los estudios sobre la formación del maestro, su capacidad para detectar, interpretar y tratar los errores. 4. El diseño de propuestas psicométricas, validación de test para analizar errores.

copedagógicas y sus influencias sobre el currículo de Matemáticas. Los autores a los que se hace referencia en ellos también difieren en función del área geográfica. Encontramos en este punto que las fuentes más citadas en España son los trabajos de Radatz (1979, 1980), Borassi (1987), Mulhern (1989), De Corte y Verschaffel (1989), Cury (1994), Rico (1995), Azkárate (1996). Estos trabajos, como indica Borasi (1994), son coherentes con una visión constructivista del aprendizaje y suponen un considerable avance con respecto a las teorías conductistas.

El estudio del error se presenta como valioso para investigadores y profesores, pero en la práctica y más concretamente en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se ha trabajado poco con los alumnos haciendo que ellos participen en la clasificación y categorización y aprendan a aprovechar los errores como oportunidades de aprendizaje. En cambio este enfoque si es empleado en el área de las Ciencias de la Computación donde el alumno analiza y da solución a los errores de todo tipo que puedan presentarse en el programa que él ha creado.

Este último enfoque es el que vamos a considerar en esta investigación: una vez detectado el error, el trabajo con los alumnos consistirá en plantear preguntas que les permitan revisar sus respuestas y tomar conciencia de lo adecuado o no de las mismas; también les pediremos que formulen las preguntas para las que su solución inicial es la respuesta correcta.

Para el análisis de los errores y dificultades de los alumnos, al resolver estos problemas implementaremos una adaptación del Análisis de Errores de Newman (1977) (NEA por sus siglas en inglés, o también conocida como Newman's Error Hierarchy)[12]. El modelo articula de forma sencilla la secuencia de acciones («sucesión de obstáculos») que realiza un alumno al resolver un problema y asociado a cada una de estas identifica posibles fallos que son codificados como errores. Estos errores están directamente relacionados con las capacidades de comprensión lectora, capacidad para entender el problema y transponer este al lenguaje matemático, capacidad de ejecutar correctamente el proceso ma-

[12]La ventaja de esta clasificación desde el punto de vista del maestro o tutor de aula es que le proporciona un marco acerca de cómo preguntar al alumno y cómo analizar los errores que puede haber cometido. Newman utilizó con éxito este procedimiento con alumnos de sexto curso (1977) y posteriormente Clements (1980) realizó una investigación muy completa, también exitosa, con alumnos desde quinto de Educación Primaria a primero de Educación Secundaria.

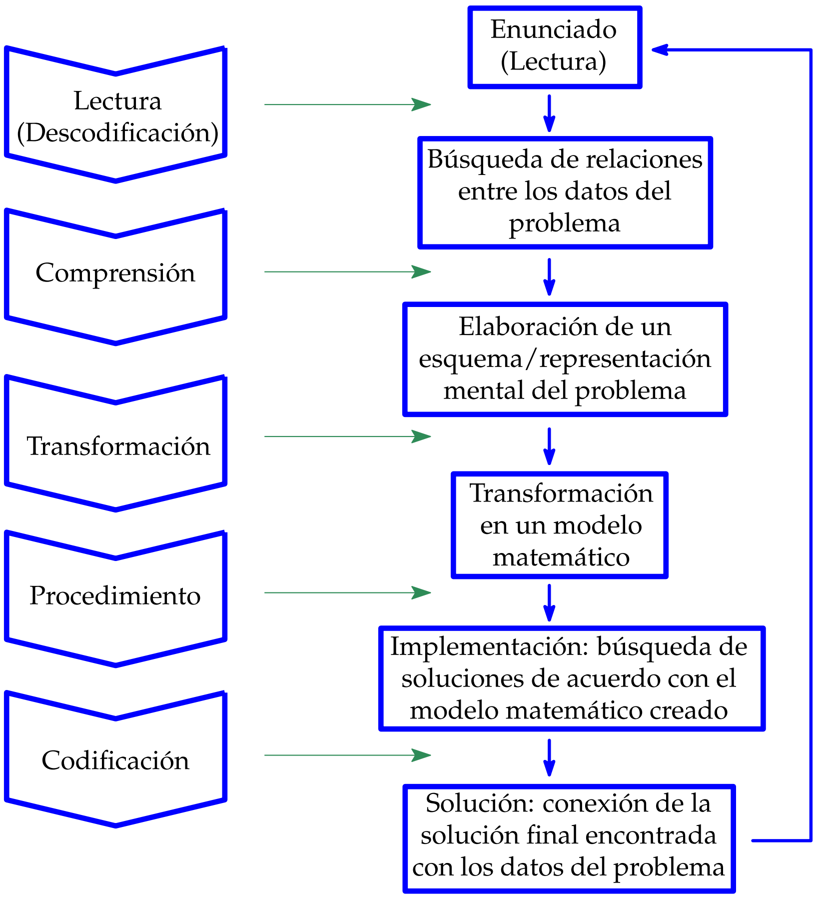


Figura 2.2: Jerarquía de errores de Newman integrada con las fases de resolución de problemas.

temático y de escribir de forma adecuada la solución (Wijaya et al., 2014)[13]. Este modelo nos resulta adecuado pues encaja con facilidad con las etapas del marco conceptual de resolución de problemas que hemos estudiado en el capítulo anterior y que vamos a poner en práctica en el trabajo en las aulas tal y como se muestra en la figura 2.2: a la izquierda se muestran los hitos de la jerarquía de errores de Newman y a la derecha las etapas de resolución de problemas. A lo largo de cada uno de estos pasos siempre se puede cometer un error por descuido (*careless error*) y se puede incurrir en cada uno de ellos en función del grado de implicación y motivación del alumno con el problema.

Newman utiliza el término «jerarquía» porque cometer un error en cada uno de estos

[13]Wijaya et al., 2014. Presenta en el artículo "Difficulties in solving context-based PISA mathematics tasks: An analysis of students' errors" un estudio de características similares a lo que afrontamos aquí en el contexto de los problemas PISA con alumnos indonesios.

hitos será un obstáculo para llegar a una solución correcta del problema. Cada uno de estos pasos tiene asociadas unas causas de error que dan lugar a clasificar los errores en subcategorías. A partir de los trabajos de Newman (1977, 1983) y Clements (1980) creamos nuestras categorías y subcategorías que quedan recogidas en la tabla 2.15 (esquema de codificación de los errores).

Nuestro objetivo es desarrollar un método de análisis que nos permita identificar los obstáculos cognitivos de los alumnos, la lógica que subyace en ellos, y a partir de aquí trabajar en el desarrollo de habilidades de resolución. En este trabajo partimos pues del modelo de Newman, al que incorporaremos el enfoque de Mayer (1985) y Mayer y y Hegarty (1996). Este autor desarrolla un método para analizar errores de los alumnos aplicable a cualquier tipo de problema matemático, no solo de problemas con enunciado. Su teoría se centra en analizar dos capacidades: la capacidad del alumno para comprender los problemas y la capacidad para representarlos. El alumno, según Mayer, al resolver un problema hace uso de diferentes tipos de conocimientos: el conocimiento lingüístico y factual, conocimiento de esquemas o representaciones, conocimiento algorítmico y conocimiento estratégico. Los errores que comete el alumno pueden por tanto ser debidos a debilidades en cada uno de estos conocimientos.

4. Metodología

4.1. Los problemas matemáticos analizados

A partir de las preguntas liberadas de TIMSS diseñamos dos tipos de prueba a los que nos referiremos de ahora en adelante como Test I y Test II. Ambas responden a criterios de disponibilidad de tiempo para llevarlas a cabo en las aulas.

La ventana de trabajo disponible en las aulas de 4.º de EP debía ajustarse a una sesión de clase de 45 minutos. En este tiempo debíamos presentar a los alumnos la prueba, dar las instrucciones detalladas sobre cómo cumplimentarla, resolver sus dudas iniciales, permitir que los alumnos respondieran a la prueba y devolver el aula a su disposición original (se dispuso a los alumnos para que trabajaran individualmente). Se diseña la prueba que denominaremos «Test I»[14] que recoge todos los dominios en las mismas proporciones que

[14] Las pruebas Test I y Test II, así como las tablas resultado del análisis de los trabajos de los alumnos se recogen en el Anexo I.

Tabla 2.8: Contenido Test I.

Código pregunta	Bloque contenidos	Subdominio contenidos	Dominio cognitivo
M03126A	Números	Enteros	Aplicar
M03126B	Números	Enteros	Razonar
M031379	Números	Enteros	Razonar
M051091	Números	Fracciones	Conocer
M051601	Números	Patrones	Aplicar
M041299	Números	Fracciones	Conocer
M041155	Geometría	Formas	Aplicar
M041098	Números	Enteros	Aplicar
M041184	Datos	Organizar	Razonar
M051123	Geometría	Formas	Conocer
M051117	Datos	Leer	Razonar

Fuente: elaboración propia.

la original «TIMSS Matemáticas 2011» sobre la que hemos hablado en el apartado 2.3 (tabla 2.7). El Test I contiene 9 ítems que dan lugar a 11 preguntas. Cada pregunta va acompañada de un pequeño cuestionario en el que se indaga en términos cualitativos sobre el grado de dificultad percibida por el alumno, la familiaridad con la tarea y su percepción sobre lo correcto o no de la respuesta (sobre las respuestas a este cuestionario hablaremos en los capítulos siguientes, ahora nos vamos a centrar en el análisis de los errores y el trabajo con ellos en clase). Se pide a todos los alumnos que muestren su proceso de resolución acompañándolo de texto escrito, dibujos o todo aquello que consideren necesario para entender su trabajo, no solo las operaciones realizadas. No todos los alumnos han respondido a esta demanda, en parte por la falta de costumbre, pues no están familiarizados con tener que explicar su pensamiento, y en parte porque sentían que les apremiaba el tiempo. En la prueba oficial solo se pide a los alumnos que muestren sus razonamientos en las preguntas de respuesta abierta.

Las tablas 2.8, 2.9 y 2.10 muestran las características finales de este test.

También en el caso de los grupos de 5.º curso contábamos con la limitación temporal de una sesión de clase, 45 minutos, pero al considerar la edad de los alumnos se optó por incluir un mayor número de preguntas y eliminar el cuestionario sobre percepción ya que para estos alumnos se han diseñado otros cuestionarios sobre actitud ante las

Tabla 2.9: Preguntas por bloque de contenidos y dominios cognitivos del Test I.

Bloque contenidos	Porcentaje	Número de preguntas	Dominio cognitivo	Porcentaje	Número de preguntas
Números	63%	7	Conocer	27%	3
Geometría	18%	2	Aplicar	36%	4
Datos	18%	2	Razonar	36%	4

Fuente: elaboración propia.

matemáticas y aspectos metacognitivos de los que hablaremos más adelante. Tenemos por tanto un segundo test, Test II o Prueba Completa en el que se han incluido todas las preguntas liberadas de TIMSS 2011[15]. El Test II está formado por 25 ítems que dan lugar a 29 preguntas. Las tablas 2.11 y 2.12 muestran la estructura de este segundo test. También en este caso se pide a los alumnos que muestren sus procesos de resolución.

Tabla 2.10: Cuestionario que acompaña a las preguntas del Test I.

<table>
<tr><td>Percepción sobre el grado de dificultad</td><td>Este problema me ha resultado:</td><td>Fácil</td><td>Dificultad media</td><td>Difícil</td></tr>
<tr><td>Percepción sobre la corrección</td><td>Creo que tengo el problema:</td><td>Bien resuelto</td><td>Podría tenerlo bien resuelto</td><td>No lo tengo bien resuelto</td></tr>
<tr><td>Percepción sobre el nivel de comprensión</td><td>En el ejercicio:</td><td>He entendido lo que me pedía el enunciado</td><td>No me ha quedado muy claro el enunciado, pero lo he hecho</td><td>No he entendido el enunciado</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Grado de familiaridad con el problema</td><td>Este problema es:</td><td>Completamente nuevo para mí</td><td>He visto problemas como este antes, pero he olvidado cómo se hacían</td><td>Recuerdo haber trabajado problemas como este antes y recuerdo cómo se resuelven</td></tr>
<tr><td>¿Has trabajado alguna vez este tipo de problemas en casa?</td><td>Sí, a menudo</td><td>A veces</td><td>No</td></tr>
</table>

Fuente: elaboración propia.

[15] Versión en castellano disponible en la página http://evaluacion.educalab.es/timsspirls/matematicas.

Tabla 2.11: Preguntas por bloque de contenidos y dominio cognitivo del Test II.

Bloque de contenidos	Porcentaje	Número de preguntas	Dominio cognitivo	Porcentaje	Número de preguntas
Números	62%	18	Conocer	44%	13
Geometría	24%	7	Aplicar	24%	7
Datos	13%	4	Razonar	31%	9

Fuente: elaboración propia.

Tabla 2.12: Contenido Test II.

Pregunta número	Código pregunta	Bloque contenidos	Subdominio contenidos	Dominio cognitivo	Pregunta número	Código pregunta	Bloque contenidos	Subdominio contenidos	Dominio cognitivo
1	M031346A	Números	Enteros	Aplicar	16	M051123	Geometría	Figuras	Conocer
2	M031346B	Números	Enteros	Razonar	17	M051109	Datos	Leer	Conocer
3	M031379	Números	Enteros	Razonar	18	M051117	Datos	Leer	Razonar
4	M031346C	Números	Enteros	Razonar	19	M041010	Números	Enteros	Conocer
5	M031380	Números	Enteros	Razonar	20	M041098	Números	Enteros	Aplicar
6	M031083	Geometría	Figuras	Conocer	21	M041003	Números	Enteros	Conocer
7	M031313	Números	Enteros	Aplicar	22	M041104	Números	Fracciones	Conocer
8	M031071	Geometría	Figuras	Conocer	23	M041299	Números	Fracciones	Conocer
9	M031185	Números	Enteros	Razonar	24	M041329	Geometría	Puntos	Conocer
10	M051305	Números	Fracciones	Aplicar	25	M041158	Geometría	Figuras	Aplicar
11	M051091	Números	Fracciones	Conocer	26	M041143	Geometría	Figuras	Conocer
12	M051001	Números	Enteros	Razonar	27	M041155	Geometría	Figuras	Aplicar
13	M051007	Números	Enteros	Razonar	28	M041335	Datos	Leer	Conocer
14	M051203	Números	Enteros	Conocer	29	M041184	Datos	Organizar	Razonar
15	M051601	Números	Patrones	Aplicar					

Fuente: elaboración propia.

4.2. Participantes

La muestra total de alumnos que participaron en estos Test es de 198, de los cuales 111 son alumnos de 4.º que han respondido al Test I (cinco clases diferentes de dos centros públicos distintos) y 87 son alumnos de 5.º (cuatro clases diferentes de dos centros públicos distintos a su vez a los centros que han participado en el Test I), 43 de estos han cumplimentado el Test I y 44 el Test II. Todos ellos pertenecen a diferentes centros de titularidad

Tabla 2.13: Porcentaje de respuestas correctas. Test y Resultados oficiales.

5.º curso	Números	Geometría	Datos	Total	5.º curso	Conocer	Aplicar	Razonar	Total
Comprensión	21,1%	18,3%	6,2%	45,6%	Comprensión	24,7%	7,2%	13,5%	45,4%
Transformación	18,9%	1,8%	4,4%	25,1%	Transformación	4,1%	1,6%	19,3%	25,0%
Procedimiento	22,8%	3,1%	0,6%	26,5%	Procedimiento	6,5%	11,0%	9,0%	26,5%
Codificación	1,2%	0,6%	0,0%	1,8%	Codificación	1,2%	0,4%	0,1%	1,7%
Descuido	1,0%	0,0%	0,1%	1,1%	Descuido	1,0%	0,0%	0,1%	1,1%
Total	65,0%	23,8%	11,3%	100,0%	Total	37,5%	20,2%	42,0%	100,0%

Fuente: elaboración propia.

pública seleccionados con un muestreo no probabilístico intencional entre aquellos a los que teníamos acceso y que voluntariamente se prestaron a participar.

Antes de analizar los resultados de nuestros alumnos desde la perspectiva del análisis de tareas y los errores cometidos, corregimos las pruebas siguiendo la guía de evaluación oficial, *TIMSS 2011-Grade 4 Released Items and Percent Correct Statistics Assessment*. Esto nos permite obtener una puntuación final para cada alumno, resultado de la suma de las puntuaciones parciales, el porcentaje de respuestas correctas para cada una de las preguntas y compararlo con los resultados oficiales de TIMSS 2011 (tabla 2.13).

El porcentaje promedio de respuestas contestadas correctamente para nuestra muestra de 4.º es del $37\,\%$ frente al $38\,\%$ de la muestra de España en TIMSS 2011 para estas mismas preguntas. Se observa también que hay preguntas para las que incluso un curso después no hemos conseguido alcanzar el nivel de respuestas correctas del promedio internacional. Analizaremos con detalle las respuestas que todos estos alumnos dan a estas preguntas y el tipo de errores que cometen.

En primer lugar, determinamos la validez estadística de nuestra muestra de alumnos de cuarto curso a partir de un contraste de hipótesis sobre la diferencia de proporciones de dos poblaciones independientes, la oficial con 4183 alumnos y nuestra muestra de 4.º curso de 111 alumnos. La pregunta que nos planteamos es «¿se parece nuestra muestra a la de "TIMSS 2011 España"para que los errores analizados puedan ser considerados significativos (relevantes)». La tabla 2.14 recoge los p-valores para cada una de las preguntas con niveles de confianza del $0{,}95$. Los p-valores obtenidos son mayores que el nivel de significación del $5\,\%$, y por tanto no hay indicios suficientes para rechazar la hipótesis nula: «se encuentran diferencias significativas entre la frecuencia de errores observados en las respuestas al Test I y Test II y la frecuencia de errores esperados en las respuestas de los

Tabla 2.14: Valores del contraste de hipótesis sobre la diferencia de proporciones para los alumnos de 4.º

Ítem	Muestra Test I 4.º EP	TIMSS España	p-valor
M031346A	72%	63 %	0,0505
M031346B	14%	20 %	0,1451
M031379	11%	14 %	0,4918
M051091	30%	30 %	0,8863
M051601	48%	50 %	0,7773
M051123	28%	29 %	0,9671
M051117	43%	50 %	0,1598
M041098	32%	36 %	0,4390
M041299	9%	14 %	0,1333
M041155	41%	38 %	0,4614
M041184	77%	75 %	0,5527

Fuente: elaboración propia.

Test oficiales»; de haber sido así nuestra muestra podría decirse que es una «muestra mal hecha» y que las conclusiones obtenidas de nuestro análisis no pueden ser consideradas como significativas o relevantes a la hora de explicar las dificultades y errores detectados en las respuestas al test.

El análisis se ha hecho con el paquete de software R. Tan solo en el caso del ítem M031346A obtenemos un p-valor muy ajustado: los resultados en nuestra muestra son mejores que los resultados de la muestra nacional. Una posible explicación es que esta es la primera pregunta del test, y fue utilizada para dar las instrucciones, por lo que fue leída en voz alta y, en alguna medida, explicada[16].

[16]La autora de este estudio solo estuvo presente en cuatro de las aulas que han participado en el estudio, en el resto se confió la prueba a las tutoras de clase y un alumno del último curso del grado de Magisterio en Educación Primaria que había estado presente con la investigadora en el momento en que esta realizaba la prueba y por lo tanto fue instruido sobre cómo llevarla a cabo.

4.3. Procedimiento de codificación de errores

Para clasificar los errores detectados en la prueba se corrigen todas las soluciones de acuerdo con la guía de corrección de TIMSS: los ejercicios se califican con un punto cuando están resueltos correctamente y con cero puntos en caso contrario, excepto en el caso de dos ejercicios de los propuestos en el Test II, que admiten calificaciones parciales. En estos ejercicios se obtienen dos puntos en caso de contestar correctamente a todas las cuestiones planteadas en el ejercicio y un punto en el caso de responder a un subconjunto de las cuestiones. Este es el caso de la pregunta M031346C (en el problema del intercambio de cromos el apartado C del Test II), en la que se obtiene un punto si se responde correctamente una combinación de las tres preguntas planteadas. Y la pregunta M041143, en la que se obtiene un punto si se identifican al menos dos de las figuras geométricas y se obtienen los dos puntos si se identifican correctamente las tres figuras geométricas.

En la tabla 2.15 se recogen las categorías de codificación que establecemos para este estudio en base al modelo de Newman y el estudio de las respuestas de los alumnos.

Para contrastar los criterios de codificación se pidió a dos correctores (tutores de las aulas en las que se ha realizado la prueba, uno de cuarto y otro de sexto de EP) que codificaran el $25\,\%$ de las respuestas erróneas elegidas al azar. Hemos obtenido valores de concordancia basados en el coeficiente Kappa de Cohen de $0{,}85$ para los errores de comprensión, de $0{,}7$ para los errores de transformación y de $0{,}9$ para los errores de procedimiento. Hemos considerado solo estas categorías pues son las que tienen mayor incidencia y se corresponden con los primeros pasos del proceso de resolución: cometer un error en una de estas etapas iniciales suele provocar la multiplicación de errores posteriores. De acuerdo con Landis y Koch (1977a y 1977b), estos valores indican que la codificación es coherente (los errores en concordancia debidos al azar pueden considerarse despreciables).

Las respuestas en blanco son codificadas y contabilizadas, pero no forman parte del análisis ya que sin más información por parte de los alumnos no somos capaces de identificar la razón por la cual la pregunta no ha sido contestada[17].

[17] En algunos casos se podría inferir que es debido a falta de tiempo, pues hay alumnos que justifican sus respuestas con gran cantidad de detalles y se observa entre estos alumnos que son las preguntas finales las que dejan mayoritariamente sin contestar.

Tabla 2.15: Esquema de codificación de los errores.

Tipo de Error	Código	Subtipo	Explicación
Errores de lectura	E1.1	Reconocimiento de términos: ¿es capaz el alumno de reconocer las palabras?	Errores asociados al reconocimiento de las palabras y los símbolos: ¿es capaz el alumno de leer el enunciado? Estos errores están más ligados a las habilidades del alumno en términos de comprensión lectora que a sus capacidades matemáticas.
	E1.2	Reconocimiento de símbolos: ¿es capaz de reconocer los símbolos?	
Errores de comprensión	E2.1	El alumno no es capaz de identificar qué le está contando el problema o de discernir la información relevante de aquella que no lo es, o no es capaz de averiguar información que no está explícitamente indicada en la redacción del problema.	¿Entiende el alumno la pregunta?, interpretamos estos errores como aquéllos que derivan de las dificultades del alumno para entender en qué consiste el problema. Para ponerse en la situación problema y crearse su propio esquema mental[19].
	E2.2	Compresión de conceptos y términos matemáticos concretos.	
Errores de transformación	E3		¿Es capaz el alumno de identificar el proceso matemático necesario para obtener la solución?. Son los errores asociados a la modelización matemática de la situación planteada por el problema. El alumno tiende a aplicar una operación o un procedimiento sin analizar si este es necesario o no. No es capaz de dar con la estrategia.
Errores de procedimiento			¿Es capaz el alumno de ejecutar con éxito las operaciones matemáticas?
	E4.1	El alumno escoge al azar una operación aritmética	Para ello elige o encuentra los números que aparecen en el problema y opera con ellos. La operación aritmética viene determinada por aquella con la que el alumno se encuentra más cómodo o la que recientemente se ha trabajado en clase
	E4.2	Operación incorrecta	Ejecuta la operación equivocada, este error está ligado a la falta de comprensión sobre el significado de las operaciones
	E4.3	Errores en el algoritmo o en el cálculo	El alumno comete errores al ejecutar el algoritmo o hacer los cálculos, pero la operación aplicada es la correcta
	E4.4	Error por omisión	El alumno ejecuta todas las operaciones para llegar a la solución final pero no proporciona una respuesta, el problema parece inconcluso. En los problemas de más de una etapa, el alumno solo realiza la primera o primeras etapas. No termina de resolver el problema
	E4.5	Respuesta o error aleatorio	No encontramos explicación plausible para lo que hace el alumno

Tipo de Error	Código	Subtipo	Explicación
Errores de codificación	E5		El alumno es capaz de ejecutar las operaciones necesarias, pero no de dar la respuesta en el modo apropiado
Error por descuido[20]	E6		El alumno ejecuta correctamente todos los pasos, pero comete un error por descuido o no prestar atención, entendemos que este tipo es difícil que se repita de forma sistemática
	E7[21]		Problema en blanco, no hay respuesta

[19]Wijaya et al (2014) considera que este esta categoría se corresponde con el primer estadio de habilidades relacionadas con el proceso de modelización matemática. Los errores debidos al proceso de transformación configuran el segundo estadio.

[20]Este error no es específico de ninguno de los pasos de la jerarquía de Newman.

[21]En la mayor parte de la bibliografía consultada este error es considerado una subcategoría dentro de los errores de procedimiento o directamente no es considerado. Hemos optado por considerarlo un tipo de error independiente pues no sabemos la razón última que ha llevado al alumno a no hacer absolutamente nada.

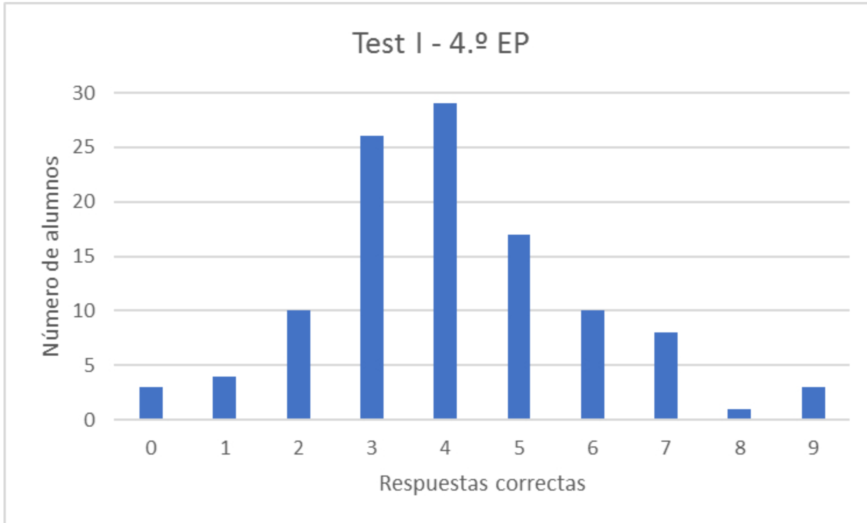
No hemos encontrado ningún error codificable como error de lectura. Los alumnos de estas edades no han mostrado este tipo de problemas de habilidad lectora, pero sí somos conscientes de que algunos alumnos de las clases de cuarto no supieron interpretar inicialmente la forma «1/2» como la fracción $\frac{1}{2}$ en el problema M041299. Fueron las tutoras de las clases donde este problema podría haber surgido las que nos avisaron antes de proceder con el test, se explicó a todos los alumnos durante las instrucciones iniciales y se dejó constancia en la pizarra de la equivalencia entre ambas grafías. No tenemos constancia de que este error haya podido darse en otros grupos.

4.4. Breve reseña sobre los resultados

De los 111 alumnos de 4.º de EP que han completado el Test I, ninguno de ellos ha contestado bien todas las preguntas. La figura 2.3 muestra el número de alumnos frente al número de respuestas correctas obtenidas. Se observa que el número máximo de preguntas contestadas correctamente por un alumno es de nueve y que solo tres alumnos han conseguido alcanzar este resultado. El $35\,\%$ llega a responder bien a cinco o más preguntas y hay tres alumnos que resuelven mal todas las preguntas. La media y mediana de las preguntas contestadas correctamente es cuatro, con una desviación estándar de $1{,}8$. Además, el $33\,\%$ de los alumnos dejan preguntas sin contestar (en promedio una pregunta sin contestar por alumno).

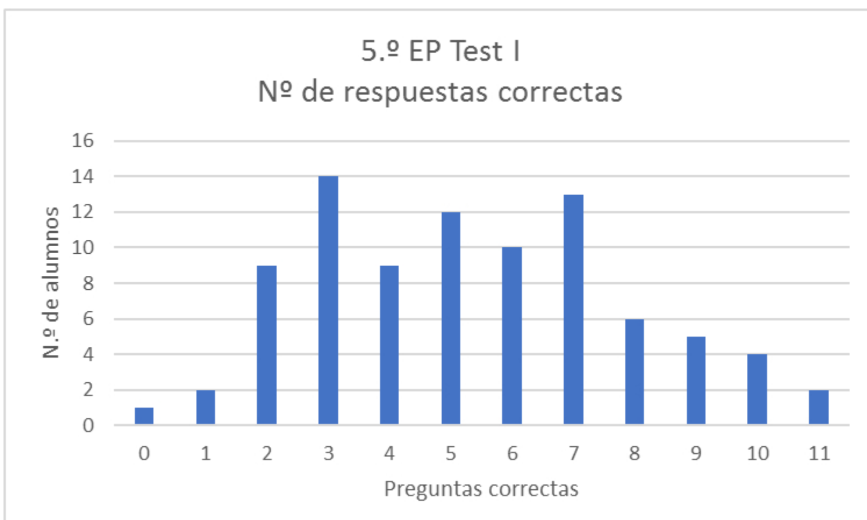
De los 87 alumnos de 5.º curso que han contestado a las preguntas que forman parte del Test I, dos alumnos resuelven correctamente todas las cuestiones ($2{,}3\,\%$), cuatro alumnos han contestado bien a diez de las preguntas ($4{,}6\,\%$) y cinco alumnos han obtenido nueve respuestas correctas ($5{,}7\,\%$). Un $59\,\%$ de los alumnos alcanzan a contestar cinco o más respuestas correctamente. Hay un alumno que contesta mal a todas las preguntas ($1{,}1\,\%$), y un total de 12 alumnos no superan las dos preguntas bien resueltas ($13{,}8\,\%$). La media y mediana de las preguntas contestadas correctamente es de cinco preguntas con una desviación estándar de $2{,}5$. El $41\,\%$ de los alumnos deja alguna pregunta sin contestar (en promedio no alcanza a ser una pregunta sin contestar por alumno). Los datos de estos alumnos se recogen en la figura 2.4.

Tenemos 2970 respuestas, 1221 corresponden a alumnos de 4.º ($41{,}1\,\%$) y 1749 a los alumnos de 5.º ($58{,}9\,\%$). De estas, 1400 son respuestas correctas (el $35{,}5\,\%$ de alumnos de 4.º y el restante $67{,}5\,\%$ de alumnos de 5.º). El estudio de errores lo hacemos sobre las 1340 respuestas incorrectas ($49{,}4\,\%$ corresponde a 4.º y el restante $50{,}6\,\%$ a 5.º) y para cada tipo de



Fuente: elaboración propia.

Figura 2.3: Test I. Respuestas correctas de los alumnos de 4.º



Fuente: elaboración propia.

Figura 2.4: Test I. Respuestas correctas de los alumnos de 5.º

Tabla 2.16: Tipos de error. Análisis de frecuencias.

Tipo de Error	Test I 4.º	Porcentaje	Test I 5.º	Porcentaje	Test II 5.º	Porcentaje
Comprensión	333	50,3%	105	46,7%	309	45,5%
Transformación	144	21,8%	61	27,1%	170	25,0%
Procedimiento	166	25,1%	55	24,4%	180	26,5%
Codificación	16	2,4%	4	1,8%	12	1,8%
Descuido	3	0,5%			8	1,2%
Total de errores observados	**662**	**100 %**	**225**	**100 %**	**679**	**100 %**

Fuente: elaboración propia.

error se contrasta con las estrategias exitosas encontradas. El análisis de estas respuestas revela que en torno al 50 % de los errores son debidos a errores de comprensión en ambos niveles, el 50 % restante se distribuye aproximadamente a partes iguales entre errores de transformación y procedimiento. (Véase la tabla 2.16).

Clements y Ellerton (1992) recopilan los resultados de diferentes investigaciones realizadas a lo largo de los años 80 y 90 y concluyen que en todas ellas la mayoría de los errores se deben a problemas de comprensión y transformación. En el estudio de Wijaya et al. (2014), que ya hemos mencionado, se analizan las respuestas a la prueba PISA 2009 de 362 alumnos de noveno y décimo año (tercero y cuarto de la ESO) y se encuentra que el 80 % de los errores pueden categorizarse en los bloques de comprensión y transformación. Nuestros resultados están en línea con estas investigaciones.

Las estrategias utilizadas por los alumnos para responder correctamente nos permitirán analizar los errores de las respuestas incorrectas. Las respuestas incorrectas serán también analizadas por bloques de contenidos y dominios cognitivos.

La tabla 2.16 recoge un resumen de los tipos de errores en las diferentes pruebas, en tanto que en la tabla 2.17 aparecen los datos de los tipos de errores que se cometen en las diferentes preguntas. Para cada tipo de error, analizamos a continuación en detalle qué características presenta. En los casos dudosos las entrevistas con los niños nos han permitido discernir el tipo de error y aclarar sus razonamientos.

Tabla 2.17: Frecuencias de los errores por pregunta. 4.º

	Comprensión	Transformación	Procedimiento	Codificación	Descuido	Total
M031346A	14	1	10	0	0	25
M031346B	19	51	17	0	0	87
M031379	18	32	38	0	0	88
M051091	66	0	1	1	0	68
M051601	13	12	14	9	1	49
M041299	33	16	30	6	1	86
M041155	58	1	0	0	0	59
M041098	14	0	51	0	1	66
M041184	2	15	1	0	0	18
M051123	70	0	1	0	0	71
M051117	26	16	3	0	0	45
Total	**333**	**144**	**166**	**16**	**3**	**662**

Fuente: elaboración propia.

4.5. Secuencia y ejemplo de entrevistas

Con el objeto de validar nuestra categorización e identificar las fuentes de los errores así como trabajar con los alumnos estos errores (objetivo de carácter metacognitivo), una vez corregidas y codificadas las pruebas y realizada la doble codificación de errores, en dos de las aulas de 4.º y una de las aulas de 5.º hemos podido corregir el test con los alumnos. En una de las aulas de 4.º se ha corregido el Test I completo, en la otra solo nos centramos en las preguntas donde nos había resultado más complicado categorizar los errores. En el aula de 5.º revisamos con los alumnos las preguntas en las que habíamos detectado un porcentaje mayor de errores. No fue posible disponer de tiempo adicional para corregir la prueba en el resto de las aulas.

Se entrega a los alumnos una copia del test en blanco para que tengan presentes los enunciados en todo momento. Se les explica que vamos a corregir la prueba entre todos y para ello irán saliendo a la pizarra y en primer lugar leerán la pregunta en voz alta.

Se recalca que es muy importante para todos nosotros escuchar lo que está pensando y por eso les preguntaremos mientras están explicando el problema.

Nuestro objetivo es centrarnos en escuchar lo que el alumno está pensando y que verbalice este proceso al máximo. Se le plantean preguntas como:

- Para identificar errores de lectura: «Léenos la pregunta en voz alta, alto y claro para que todos podamos escucharte. Si no entiendes o no conoces alguna de las palabras, por favor, nos lo dices».

- Para identificar errores de comprensión: «Dime qué es lo que te están preguntando», «cuéntanos con tus propias palabras lo que has leído y qué es lo que el problema te está contando»; si el alumno sólo explica la historia, pero no aquello a lo que debe responder: «y entonces, la pregunta que tengo que contestar es…».

- Para identificar errores de transformación: «Ahora, dime qué es lo que vas a hacer», «cómo vas a contestar a esta pregunta», «qué necesitas hacer para contestar a…».

- Para identificar errores de procedimiento: «Enséñame lo que vas a hacer, habla en voz alta para que todos podamos entender lo que estás haciendo», «por favor, ve paso a paso».

- Para identificar errores de codificación, comprobar que no es capaz de responder de forma adecuada a la respuesta: «Y, entonces, la respuesta es…», «dinos en una frase completa cuál es tu respuesta». Si esta no es la correcta, plantear una contra-pregunta sobre lo que el alumno considera su respuesta correcta o final.

- Si durante este proceso el alumno no comete el mismo error de interpretación que en su respuesta original interpretamos el error como fruto de un descuido. También influye en esta clasificación el conocimiento de los tutores sobre las formas de proceder de los alumnos y su personalidad.

5. Categorización y análisis de los errores observados

A continuación abordamos el análisis pormenorizado de las respuestas erróneas de los alumnos, cada una de ellas es categorizada de acuerdo con el esquema de codificación establecido (tabla 2.15). El análisis se aborda por tipo de error, frecuencia. Las argumentaciones orales y escritas de los alumnos nos permiten analizar los orígenes de estos errores y se plantea una sugerencia de trabajo que ayude a corregirlos.

Tabla 2.18: Frecuencias de los errores por pregunta. 5.º

	Comprensión	Transformación	Procedimiento	Codificación	Total
M031346A	5	1	3	0	9
M031346B	10	46	6	0	62
M031379	14	31	15	0	60
M031346C	6	24	5	0	35
M031380	5	16	7	0	28
M031083	1	2	0	0	3
M031313	0	1	2	0	3
M031071	21	0	0	0	21
M031185	1	0	7	0	8
M051305	0	0	13	0	13
M051091	40	0	1	1	42
M051001	12	2	4	1	19
M051007	5	1	14	0	20
M051203	0	0	12	0	12
M051601	8	3	8	3	22
M051123	36	3	11	4	54
M051109	1	18	0	0	19
M051117	23	4	3	0	30
M041010	0	0	0	0	0
M041098	3	0	42	0	45
M041003	13	0	1	0	14
M041104	11	0	1	0	12
M041299	10	3	14	3	30
M041329	11	0	0	0	11
M041158	0	7	7	0	14
M041143	17	0	0	0	17
M041155	38	0	3	0	41
M041335	2	1	1	0	4
M041184	16	7	0	0	23
Total	**309**	**170**	**180**	**12**	**671**

Fuente: elaboración propia.

5.1. Errores de comprensión[21]

Los alumnos que cometen este tipo de errores son capaces de leer correctamente la pregunta, entienden el vocabulario y los términos que en ella aparecen pero no son capaces de entender la situación planteada por el problema: bien porque no entienden los conceptos matemáticos a los que este vocabulario se refiere (errores del tipo E2.2) o bien porque no saben explicar en qué consiste el problema y no pueden seguir las instrucciones o secuencias planteadas en el enunciado (errores del tipo E2.1). El alumno que experimenta un bloqueo en esta fase se encuentra con la dificultad de «apropiarse del problema», no es capaz de crearse su propio espacio mental o espacio del problema que postulan Newell y Simon (1972).

En la tabla 2.19 se muestra la incidencia de los errores de comprensión y en la siguiente subsección ilustramos este tipo de errores con ejemplos de las respuestas de los alumnos a las cuatro preguntas donde este error es más frecuente (M051091, M051123, M041155 y M051117). Finalmente, cerraremos la sección con propuestas de trabajo para el aula que se pueden considerar en aquellas ocasiones en las que detectemos que los bloqueos del alumno responden a este tipo de errores.

Análisis de errores de comprensión

- Pregunta M051091. ¿Cuál de estas fracciones no es igual a las demás?:

Ⓐ $\frac{1}{2}$	Ⓑ $\frac{4}{8}$	Ⓒ $\frac{2}{4}$	Ⓓ $\frac{2}{8}$

Esta pregunta se encuadra en el bloque de números-fracciones, bloque cognitivo conocer. El diálogo mantenido con un grupo de alumnos de 4.º nos ilustra sobre el tipo de error y sus estrategias de resolución (I: investigadora, AX: alumnos):

I: ... lee la pregunta en voz alta, por favor.

[21] Solo hemos tenido la oportunidad de corregir el Test I completo en uno de los grupos de cuarto, no disponemos tampoco de todas las grabaciones, pero sí de las notas que hemos ido tomando durante la sesión. Cuando ha habido problemas para categorizar hemos pedido a uno o dos alumnos que nos explicaran su razonamiento.

Tabla 2.19: Preguntas con mayor frecuencia de errores de comprensión.

Código de pregunta	Número de errores	Código de pregunta	Número de errores
4.º CURSO		5.º CURSO	
M051123	70	M051091	40
M051091	66	M041155	38
M041155	58	M051123	36
M041299	33	M051117	23
M051117	26	M031071	21
M031346B	19	M041143	17
M031379	18	M041184	16
M031346A	14	M031379	14
M041098	14	M041003	13
M051601	13	M051001	12
M041184	2	M041104	11

Fuente: elaboración propia.

A6: ¿Cuál de estas fracciones no es igual a las demás?; es la A [el alumno contesta sin interrupción, no dando la oportunidad de preguntar sobre si ha entendido bien la pregunta o no].

A7: (Otro) No, es la B, que no tiene 2.

A6: Es la A porque el uno no está en ninguno de los otros números. (Hay algo de revuelo en la clase).

I: Vamos a ver quién está de acuerdo con vosotros, levantad la mano los que pensáis que es la A y por qué (5 niños levantan la mano).

A15: No, es la A porque el 1 solo está arriba y es impar el resto es par. (A su argumento ha unido el del alumno A6).

I: [Dirigiéndose A7] ¿Es la respuesta A la correcta?

A7: Yo he puesto la B [pausa, gesto del profesor indicando que se explique]. Que no tiene 2.

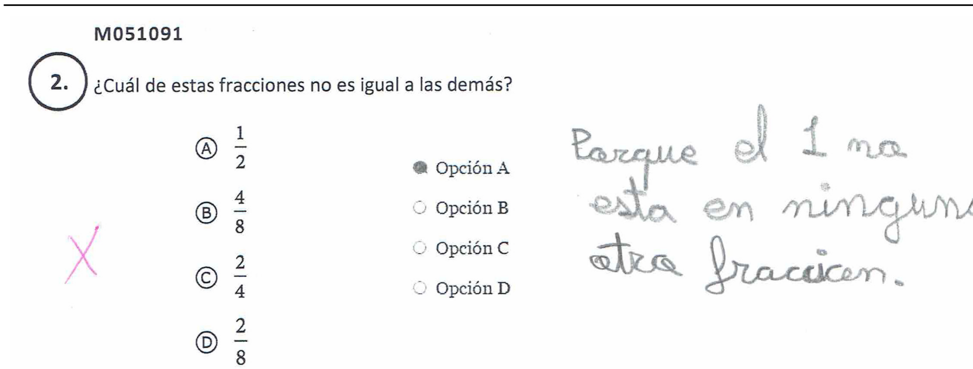
I: ¿Cuántos habéis elegido la B? (3 niños levantan la mano). ¿Cuántos pensáis que la respuesta correcta es la D? (levantan la mano 12 niños).

A12: Yo he hecho un dibujo y la D no es la mitad. (Le pedimos que salga a la pizarra a hacer su dibujo, les pedimos a distintos alumnos que han elegido esta opción que hagan sus dibujos).

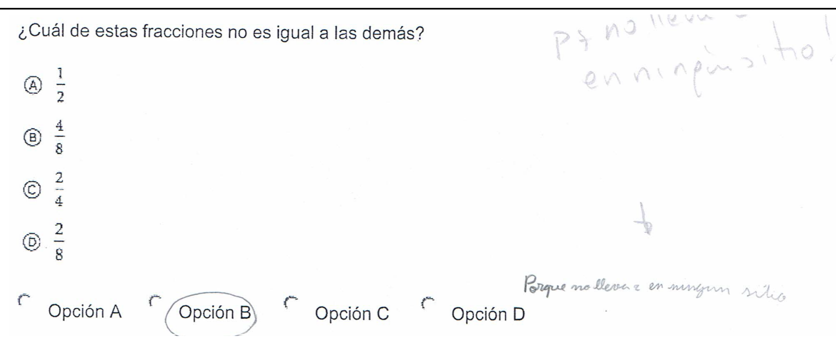
A6: Pero dice no es igual. (C0. P8)

El término «diferentes» del enunciado no ha sido interpretado como «no equivalente» por 6 de los 20 alumnos de esta clase (en total 38 de los 111 alumnos de cuarto). En la discusión que se estableció en clase repasamos el significado de fracción y la relación que hay entre el numerador y denominador. Interpretamos cada una de las fracciones como un número que dibujamos en la recta numérica (esto fue nuevo para ellos).

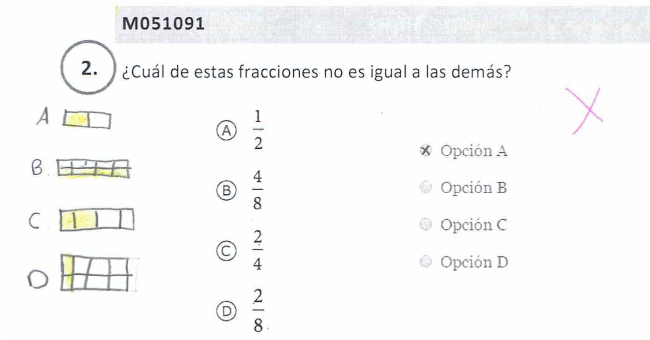
Alumno 6



Alumno 545



Alumno 108



M051091

2. ¿Cuál de estas fracciones no es igual a las demás?

A

B

C

D

Ⓐ $\frac{1}{2}$

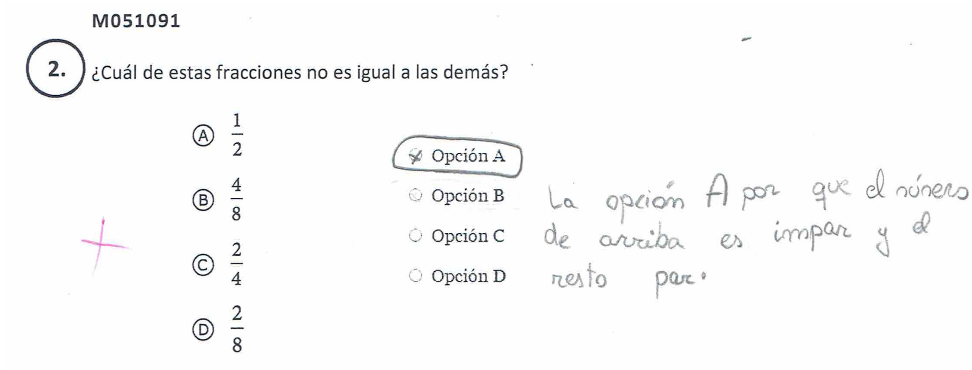
Ⓑ $\frac{4}{8}$

Ⓒ $\frac{2}{4}$

Ⓓ $\frac{2}{8}$

- Opción A
- Opción B
- Opción C
- Opción D

Alumno 15



M051091

2. ¿Cuál de estas fracciones no es igual a las demás?

Ⓐ $\frac{1}{2}$

Ⓑ $\frac{4}{8}$

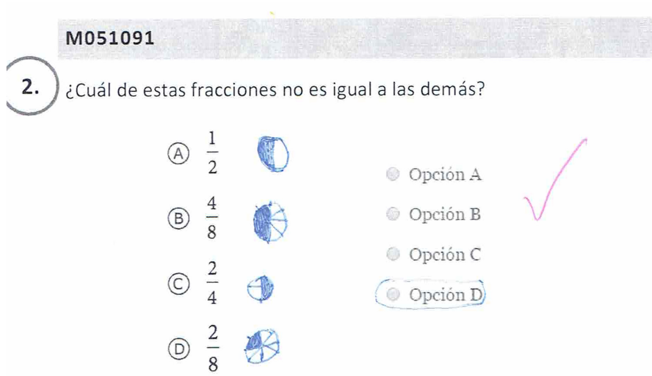
Ⓒ $\frac{2}{4}$

Ⓓ $\frac{2}{8}$

- Opción A
- Opción B
- Opción C
- Opción D

La opción A por que el número de arriba es impar y el resto par.

Alumno 95



M051091

2. ¿Cuál de estas fracciones no es igual a las demás?

Ⓐ $\frac{1}{2}$

Ⓑ $\frac{4}{8}$

Ⓒ $\frac{2}{4}$

Ⓓ $\frac{2}{8}$

- Opción A
- Opción B
- Opción C
- Opción D

Alumno 3

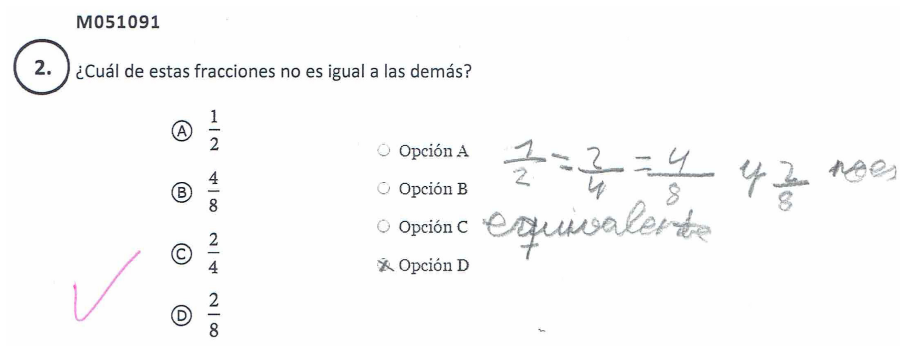


Figura 2.5: Errores de comprensión en la pregunta M051091 y soluciones correctas.

Hemos clasificado este error como E2.2, pues consideramos en primer lugar que se trata de un problema de comprensión del concepto de fracción. Los alumnos no interpretan el símbolo «$\frac{1}{2}$» como un número o una parte de un todo (una cantidad). Su razonamiento ha consistido en buscar patrones entre los números propuestos que aparecen en las fracciones o propiedades de estos como podemos ver en algunas de las respuestas aportadas (A545 en la figura 2.5) o en la secuencia de clase que hemos expuesto.

Esta pregunta tiene una tasa de error del $70\,\%$ tanto en nuestra muestra como en la prueba oficial, pero los resultados obtenidos para 5.º son igualmente preocupantes pues nos hemos encontrado con un $47\,\%$ de respuestas erróneas entre los alumnos que han contestado a esta pregunta.

En la figura 2.5 el alumno 108 ha sabido representar gráficamente cada una de las fracciones, pero luego no sabe interpretarlas. Es interesante comparar esta imagen con la aportada por el alumno 95, que ha sabido interpretar correctamente el problema y pone de manifiesto que entiende el concepto. En la sección 5.1 aportamos más detalles sobre este problema.

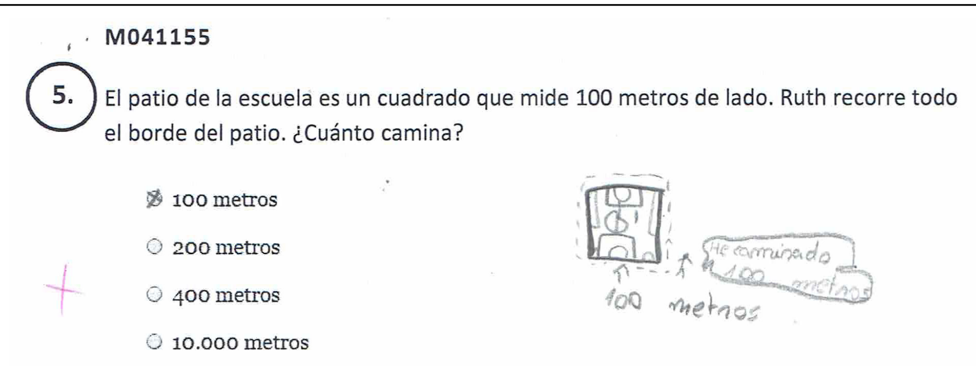
Entre los alumnos que han contestado correctamente, la estrategia más común ha sido hacer un dibujo.

Este tipo de errores también es significativo en las preguntas M041155, M051123 y M051117 que analizamos a continuación.

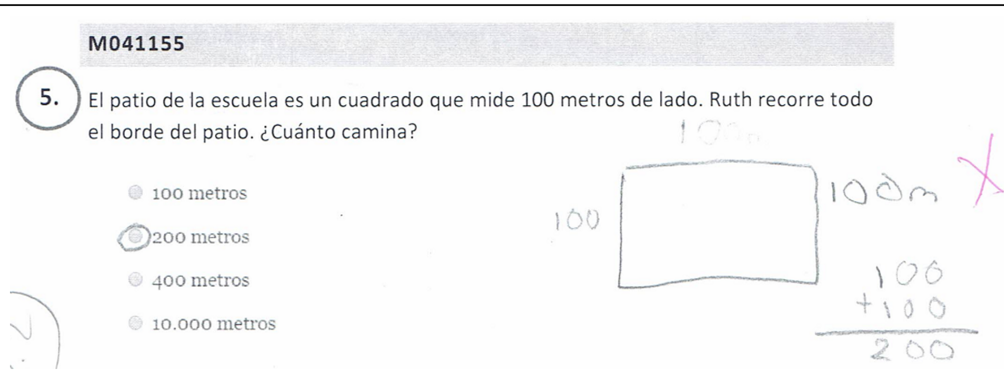
- Pregunta M041155: El patio de la escuela es un cuadrado que mide 100 metros de lado. Ruth recorre todo el borde del patio. ¿Cuánto camina?

En el caso del problema M041155 (bloque geometría-figuras, aplicar) los alumnos están interpretando el borde del patio como uno de sus lados, y no como el perímetro. Algunos de los argumentos recogidos son: «en el problema pone que mide 100», «camina 100, porque el borde y el lado es lo mismo, y lo pone» (para este alumno el borde es equivalente al lado y ambos son equivalentes al perímetro completo), «porque dice que 100 es lo que mide el lado del patio».

Alumno 15



Alumno 71



Alumno 109

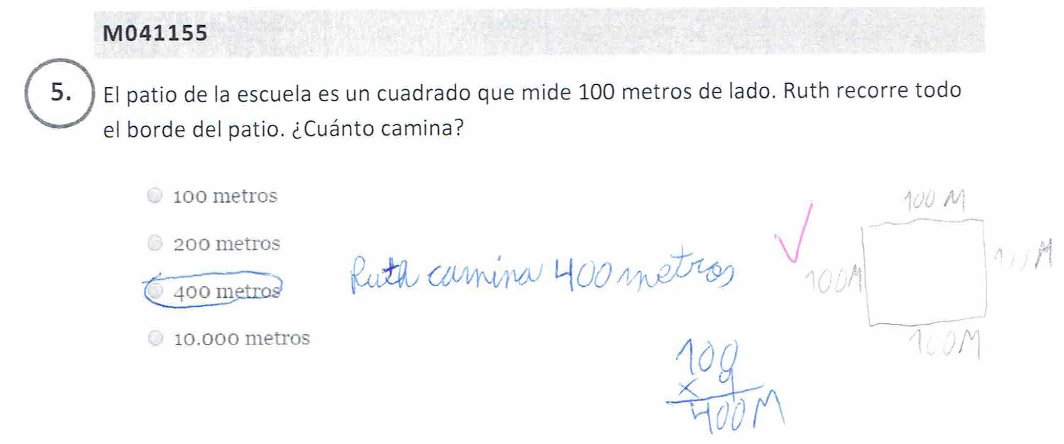
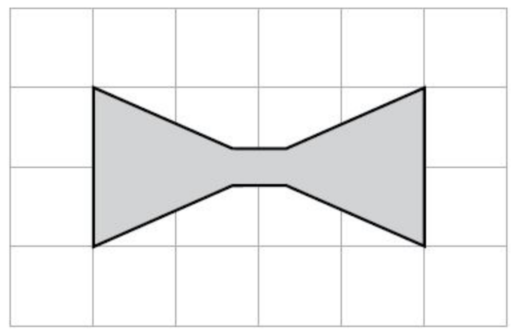


Figura 2.6: Errores de comprensión en la pregunta M041155 y solución correcta.

Al escuchar a los alumnos debatir sobre el problema se pone de manifiesto la dificultad para identificar el perímetro del patio con «recorrer todo el borde del patio». En el debate grupal se les preguntó por el perímetro de un cuadrado de lado 10 cm, y no hubo problemas para determinar que son 40 cm. La pregunta «¿qué distancia has recorrido si das una vuelta completa a un patio que tiene forma cuadrada y vas caminando a lo largo del perímetro?» tampoco planteó problemas. Sin embargo, no entienden, como nos muestran sus argumentos, que el enunciado de la pregunta M041155 esté refiriéndose a una situación similar: «dice que 100 m es lo que mide el borde del patio», «camina 100 m porque 100 m es lo que mide el borde del patio». Todos los alumnos que eligen la opción «100 metros» como respuesta dicen entender correctamente el enunciado.

Hemos encontrado un alumno que nos ha contestado que caminaría 10 000 metros. No hemos tenido la oportunidad de preguntar a este alumno por su razonamiento. Optamos por preguntar al grupo de 4.º con el que estábamos trabajando «¿cómo sería un patio que tuviera un perímetro de 10 000 metros?»; no hubo contestación inmediata. Reformulamos la pregunta: «¿cuánto son 10 000 metros?, ¿cómo de lejos están dos sitios que estén a una distancia de 10 000 metros?»; la respuesta fue «muy lejos», «entonces caminas mucho». «Pero, un patio de 10 000 metros, ¿es más grande que un campo de fútbol o no?»; algunos alumnos dudaron, otros contestaron que no y parecieron quedarse conformes con la respuesta. Tomamos nota del hecho para proponer actividades en la clase relacionadas con la medida y la construcción de referencias por parte del alumno que le permitan comparar.

- Pregunta M051123: ¿Cuántos ejes de simetría tiene esta figura?



1	2	3	4

El problema M051123 se encuadra en el bloque de geometría-figuras, conocer. Transcribimos el diálogo con un alumno:

I: . . . lee la pregunta en voz alta, por favor.

A2: ¿Cuántos ejes de simetría tiene esta figura?

I: ¿Has entendido lo que te pregunta?

A2: Sí, me pregunta que cuántos ejes tiene esta figura.

I: Muy bien, y en la figura ¿cuántos ejes de simetría has encontrado?, ¿puedes enseñármelos?

A2: Hay cuatro, estos son los ejes. Lo pone aquí. [Al alumno le hemos dado su test para que pueda responder sobre él]. (C0- P30)

Entre las respuestas erróneas, la opción «4 ejes» ha sido seleccionada por el $55\,\%$ de los alumnos de 4.º

I: ¿Por qué esto es un eje?

A2: Porque son las esquinas.

I: Son las esquinas, pero yo aquí veo más esquinas, creo que esto también es una esquina, ¿esto es una esquina?, [señalando uno de los cuatro vértices cóncavos, no marcados por el alumno].

A2: Sí, pero es que no son los principales.

A (Otro): Hay más esquinas, pero es que solo puedes elegir hasta cuatro. [Otro alumno comenta, estas son las importantes].

I: [Dirigiéndose al alumno A3, que ha escrito en su hoja: «porque tiene cuatro puntos salidos»]. ¿Por qué son cuatro los ejes de simetría?

A3 Porque son los puntos que están salidos.

I: ¿Alguien sabe cómo llamamos a las esquinas de una figura en matemáticas? [Contestan un grupo de alumnos: «vértices»]. Y entonces, si les llamamos vértices, el problema ¿por qué les llama eje de simetría?

A18: Es que eso no son los ejes. (C0. P30)

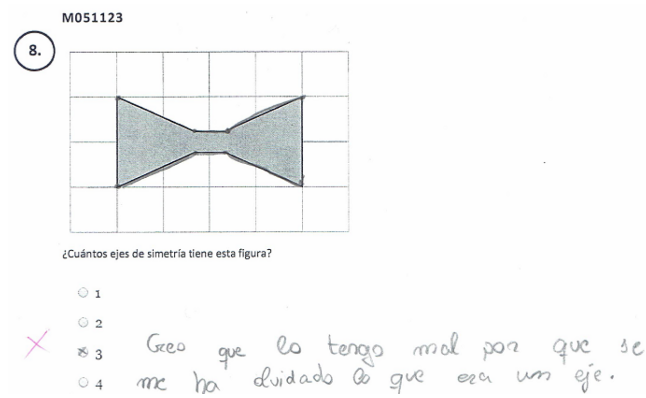
Dejamos al alumno A18 que se explique. Damos un ejemplo sobre ejes de simetría, sin hablar, solo actuando, tomando un papel que doblamos por la mitad. Lo abrimos, en una mitad pintamos con tiza la mitad de la pajarita del problema y después doblamos el papel. Al abrirlo les mostramos el nuevo dibujo con la impresión a ambos lados del doblez de la hoja. Hay varios niños que exclaman: «¡Ah, como en dibujo!».

Pedimos al alumno A7 que nos explique su dibujo, los lados que en el dibujo están con una rayita y va señalando por parejas: «este con este (marca un lado y su simétrico respecto al eje horizontal), este con este, este con este y este con este (marca los lados verticales que son simétricos respecto al eje vertical de la pajarita)». El alumno parece tener una idea intuitiva sobre lados simétricos, pero no conoce el concepto con precisión: no es consciente de que los lados son simétricos respecto a un eje y que este no tiene por qué ser único.

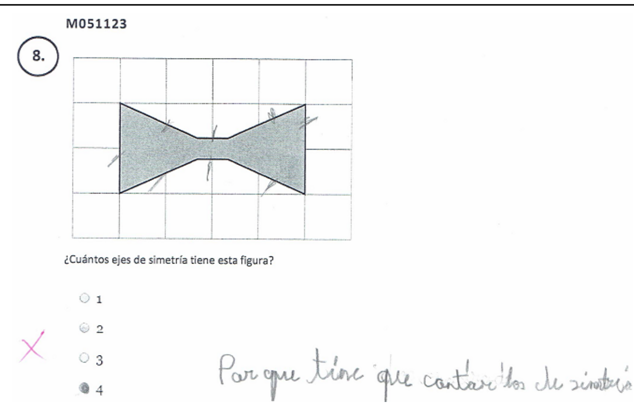
Solo dos alumnos hay respondido bien en esta clase. Han sido bastantes los alumnos que han dicho no saber qué es eje de simetría.

En la figura 2.7 se muestran algunos de los errores más significativos y alguna respuesta correcta para esta pregunta.

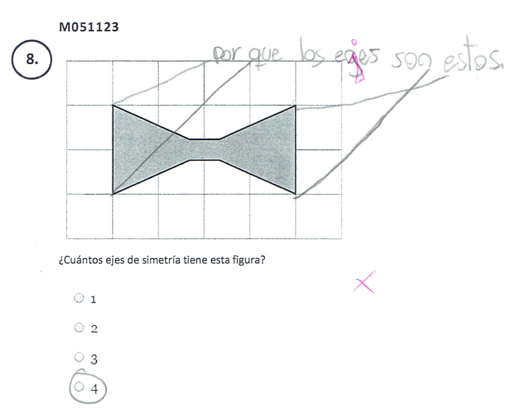
Alumno 15



Alumno 7



Alumno 2



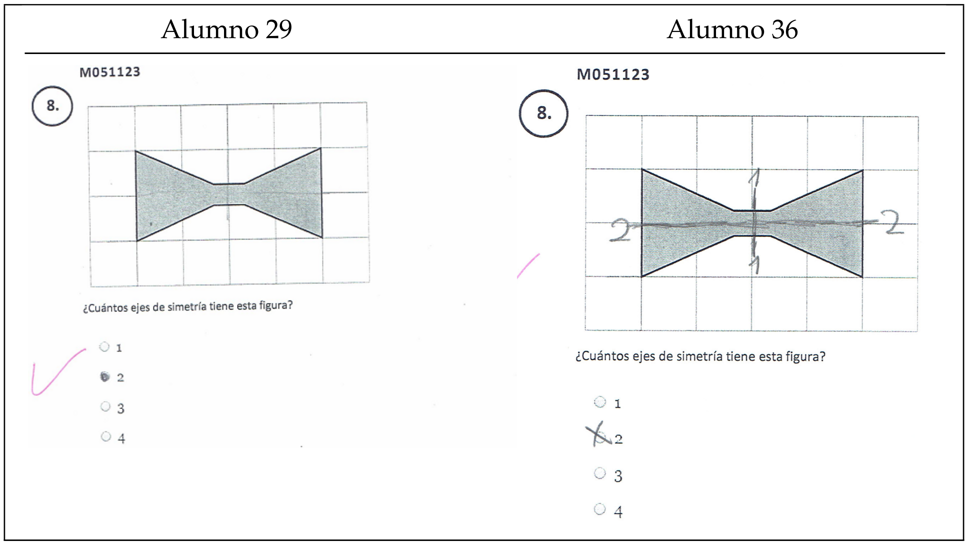
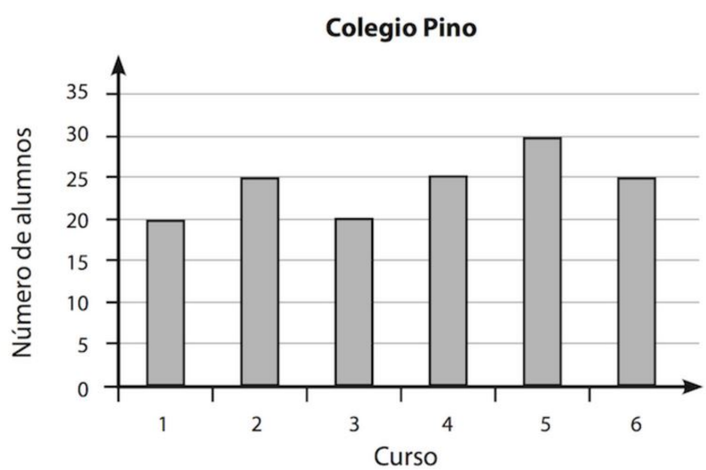


Figura 2.7: Errores de comprensión en la pregunta M051123 y soluciones correctas.

- Pregunta M051117: El gráfico muestra el número de alumnos de cada curso en el Colegio Pino.



En el colegio Pino hay plazas para 30 alumnos en cada curso. ¿Cuántos alumnos más cabrían en el colegio?

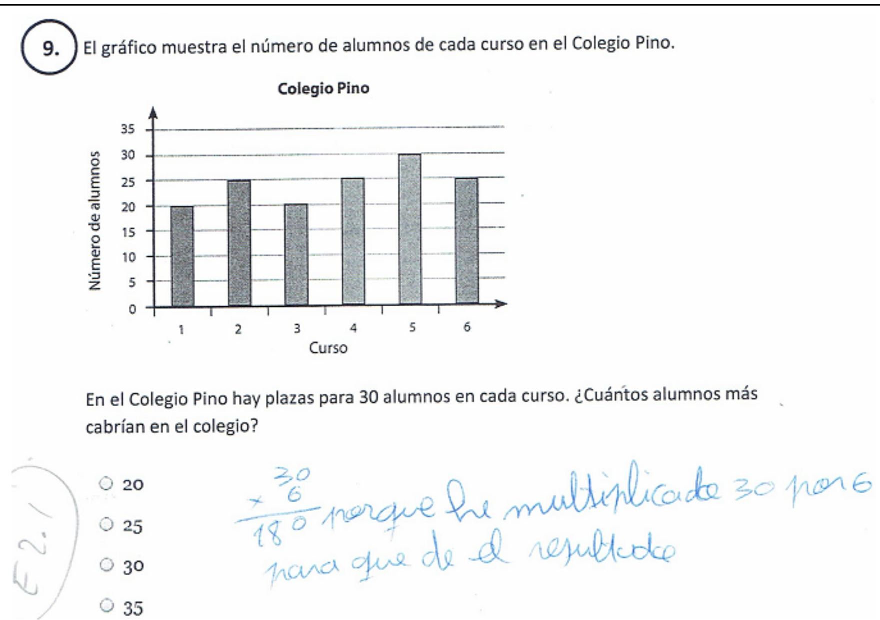
20	25	30	35

En esta pregunta (bloque de datos leer, razonar) ha resultado complicado clasificar los errores pues son muchas las respuestas sin justificar y entre las argumentadas nos resulta especialmente difícil discernir entre errores de comprensión y errores de transformación.

Hemos optado por clasificar como error del tipo E2.1 las respuestas similares a «*entran 30 porque lo dice el enunciado*» (entre los alumnos de 4.º curso que han elegido esta opción, este es el razonamiento mayoritario). Tenemos alumnos que hacen operaciones al azar a partir de los datos del enunciado que no categorizamos dentro del grupo de procedimiento pues entendemos más bien que tomar seis clases y buscar multiplicar por cinco para dar con el número del enunciado es más un problema de compresión que de procedimiento. El alumno 49 interpreta que se le está preguntado por el número de alumnos que hay en su clase.

Entre los alumnos de 5.º curso se han dado varias respuestas que no marcan ninguna opción, pero dan respuesta como la de la imagen del alumno 527. El alumno no ha entendido la pregunta planteada.

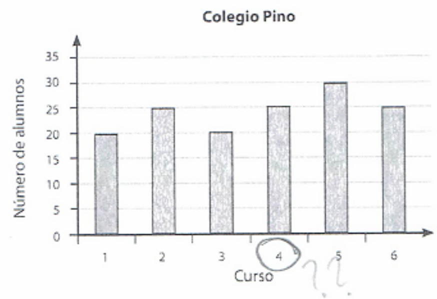
Alumno 527



Alumno 49

M051117

9. El gráfico muestra el número de alumnos de cada curso en el Colegio Pino.



En el Colegio Pino hay plazas para 30 alumnos en cada curso. ¿Cuántos alumnos más cabrían en el colegio?

- 20
- 25
- 30
- 35

E 2.1

Alumno 25

En el Colegio Pino hay plazas para 30 alumnos en cada curso. ¿Cuántos alumnos más cabrían en el colegio?

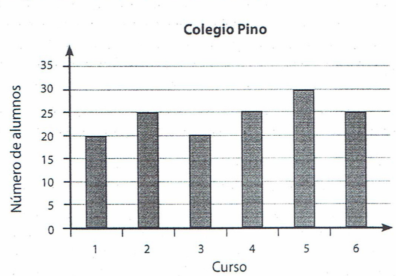
- 20
- 25
- 30
- 35

Porque si hay 30 plazas cabran 30 alumnos.

E2.1

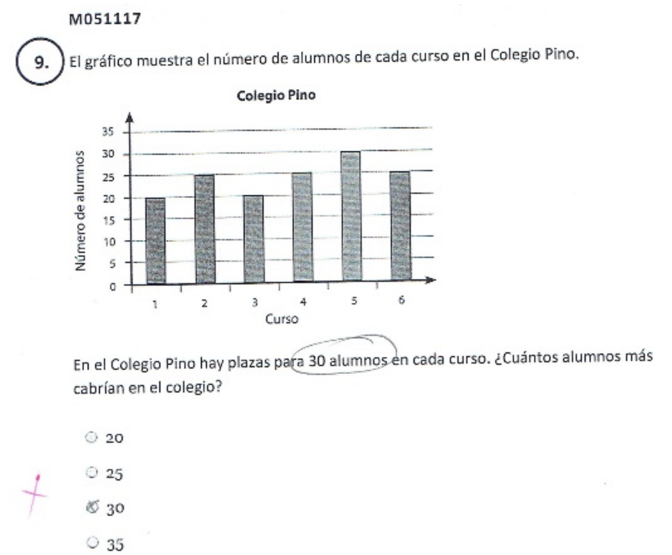
Alumno 542

9. El gráfico muestra el número de alumnos de cada curso en el Colegio Pino.



No lo entiendo

Alumno 8



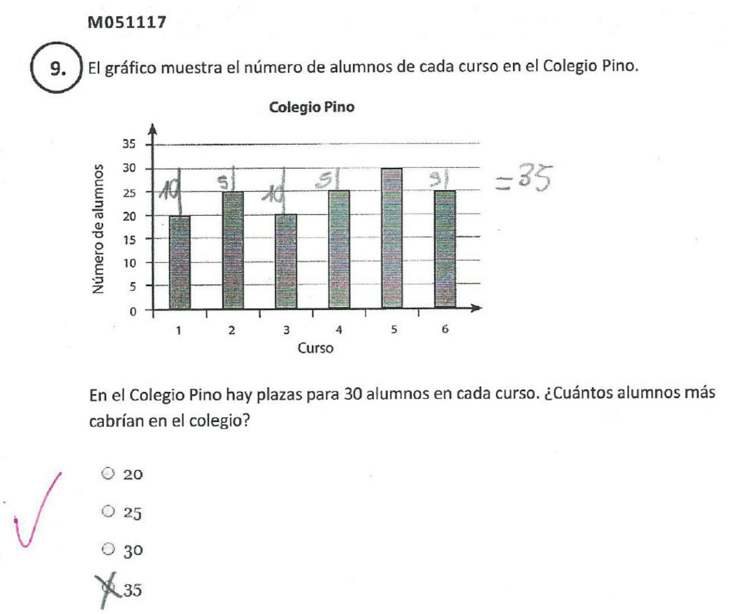
M051117

9. El gráfico muestra el número de alumnos de cada curso en el Colegio Pino.

En el Colegio Pino hay plazas para 30 alumnos en cada curso. ¿Cuántos alumnos más cabrían en el colegio?

- 20
- 25
- 30
- 35

Alumno 36



M051117

9. El gráfico muestra el número de alumnos de cada curso en el Colegio Pino.

En el Colegio Pino hay plazas para 30 alumnos en cada curso. ¿Cuántos alumnos más cabrían en el colegio?

- 20
- 25
- 30
- 35

Figura 2.8: Errores de comprensión en la pregunta M051117 y solución correcta.

Propuestas de trabajo sobre los errores de comprensión

Algunos de los errores analizados hasta ahora parecen sugerir que los enunciados no son suficientemente claros. Este es el caso de los problemas M051091 (identificar la fracción que no es equivalente) y el problema M041155 (el patio de la escuela), y podría ser el caso del problema M051117.

La corrección de la prueba en grupo nos permitió comprobar que una mayoría de los alumnos no interpretó el término «igual» del problema M051091 en los mismos términos que los planteados por la prueba oficial. Los alumnos nos hicieron ver que para una buena parte de ellos el enunciado les está pidiendo identificar «*la que tiene cosas diferentes*», «*buscar el número que no está en las otras*».

Son dos los problemas de comprensión en esta pregunta: entender el concepto de fracción e interpretar el término «igual» como «fracción equivalente». Hemos consultado la versión inglesa de esta pregunta, para estudiar si se trata de un problema de traducción, la pregunta se presenta así: «*Which fraction is not equal to the other?*». En los libros de texto consultados[22] la expresión «fracciones iguales» no la hemos encontrado, en todos ellos se habla de «fracciones equivalentes». Tampoco hemos encontrado ejercicios en los que se pida comparar más de dos fracciones para determinar si son equivalentes o no.

En ninguno se presentan las fracciones como un número ni se hace uso de la recta numérica para representarlas sobre la misma. Consideramos acertado trabajar las fracciones no solo como parte de un todo sino como un número, una cantidad.

En el problema M041155 parece ser que el enunciado también les induce a equívoco y por lo tanto podríamos considerar uno alternativo que no les llevara a pensar que los 100 metros o bien son la longitud total del borde del patio o la longitud de uno solo de los lados. Nuestra conjetura es que la dificultad deriva del significado que le otorgan al término «borde».

Una propuesta alternativa que nos parece más clara podría ser: «El patio de la escuela es un cuadrado que mide 100 metros de lado. Ruth da una vuelta completa alrededor del patio…». El texto en inglés se presenta así: «*The school playground is a square. The playground is 100 meters long. Ruth walks all the way around the edge of the palyground. How far does she walk?*».

[22] Tan solo hemos consultado los libros de texto de las aulas en las que se ha realizado el test. Se trata de tres editoriales diferentes.

Se propone como futura línea de investigación trabajar los problemas de esta prueba con enunciados alternativos.

Al trabajar sobre estos errores hemos detectado que en la mayor parte de los casos son interpretados por los maestros como problemas de comprensión lectora. Desde nuestro punto de vista la competencia lectora de un individuo está vinculada al conocimiento que el lector tiene del dominio sobre el que está leyendo. Una falta de compresión de los conceptos puede dificultar la comprensión lectora.

Por otro lado, en las entrevistas y en la corrección grupal hemos podido observar que no siempre hay correspondencia entre las habilidades o capacidades matemáticas de los alumnos y su habilidad verbal (esto último también se observa en otros tipos de errores, es común que no sepan verbalizar lo que están pensando o lo que quieren hacer). La capacidad narrativa de los alumnos a estas edades es limitada, especialmente si no se ha trabajado. Por ello, en las acciones que plantearemos a lo largo de la intervención nos centraremos en primer lugar en una correcta comprensión del enunciado. Primero intentaremos que el alumno reformule el problema y a partir de aquí avanzaremos hacia el siguiente estadio que permitirá que afloren los problemas de comprensión en el caso de que existan.

En este problema nos encontramos con la dificultad de los alumnos para resolver un problema contextualizado en una realidad conocida y cercana para ellos. Este tipo de dificultades también se manifiestan en una prueba como PISA en la etapa educativa posterior y se observan también en alumnos universitarios. Parece existir una disociación entre el conocimiento matemático o la «inteligencia matemática de los alumnos» y el conocimiento de la vida real, o en algunas ocasiones «el sentido común o el sentido físico de las cosas».

5.2. Errores de transformación

Entendemos este tipo de errores como aquellos en los que el alumno ha entendido lo que el problema le plantea, pero no es capaz de dar con la operación o estrategia que le permita solucionarlo. Entramos en la fase de resolución en la que se hace necesario manipular el esquema mental construido, transformar el «espacio problema» al lenguaje matemático. Las Matemáticas tienen su propio lenguaje, sus sistemas de expresión y representación, que son distintos a los del lenguaje natural (Duval, 1999), y las habilidades para leer, interpretar y responder en ese idioma son esenciales para conseguir un aprendizaje sig-

Tabla 2.20: Preguntas con mayor frecuencia de errores de transformación.

Código de pregunta	Número de errores	Código de pregunta	Número de errores
4.º CURSO		5.º CURSO	
M031346B	51	M031346B	46
M031379	32	M031379	31
M041299	16	M031346C	24
M051117	16	M051109	18
M041184	15	M031380	16
M051601	12	M041184	7
M041155	1	M041158	7
M031346A	1	M051117	4
M051123	0	M051123	3
M051091	0	M041299	3
M041098	0	M051601	3

Fuente: elaboración propia.

nificativo (Krutetskii, 1976; Martin y Mullis, 2011) y por tanto para ser capaz de resolver problemas.

Estos errores no solo están asociados a las habilidades aritméticas del alumno, sino también, y creemos que fundamentalmente, al abanico de estrategias que pueda conocer y saber aplicar el alumno. En este sentido, podemos comprobar que una mayoría de los alumnos solo están entrenados en traducir el problema a una operación y no en otro tipo de procedimientos que pudieran facilitarles la resolución del problema. Son muy pocos los alumnos que hacen, por ejemplo, un buen dibujo del problema, o aquellos que razonan simplificando el problema o que al explicar su solución hacen uso de problemas similares o de material manipulativo.

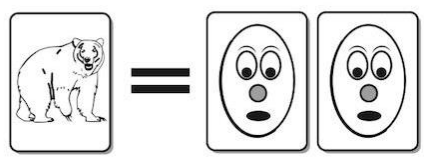
Análisis de errores de transformación

Nos centraremos en las seis preguntas que más errores de este tipo presentan. Encabezan la lista los apartados M031346B, M031379, M031346C y M031380 del problema conocido como «intercambio de cromos». Este problema consta de cinco apartados que dan lugar a siete cuestiones diferentes. Se encuadra dentro del bloque de números enteros y comprende los ámbitos de aplicar y razonar. En la página siguiente se muestra el enunciado completo del problema.

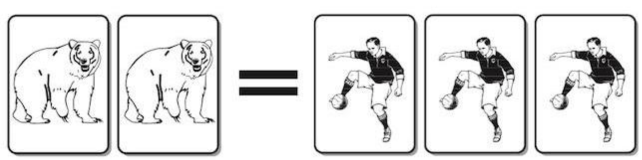
En el Test II se recogen todos los apartados de esta pregunta, en el Test I se han incluido solo los dos primeros apartados (M031346A y B) y la pregunta M031379. El porcentaje de preguntas contestadas correctamente para la opción A es mayor entre los alumnos de nuestras pruebas que entre los alumnos de las pruebas oficiales tanto a nivel nacional como internacional. Como ya hemos comentado, suponemos que esta pregunta se ha utilizado como pregunta ejemplo para explicar la estructura de la prueba y la forma de abordarla y por tanto su enunciado y contexto están más claros para la mayor parte de los alumnos. El resto de las opciones presentan una tasa de error por encima de las muestras nacionales e internacionales. Y los alumnos de quinto no llegan a alcanzar las tasas de respuestas correctas de la muestra internacional para el resto de las opciones.

Problema del «intercambio de cromos»:

En la feria del pueblo había un puesto donde la gente podía cambiar cromos.



1 cromo de animales vale por 2 cromos de muñecos.



2 cromos de animales valen por 3 cromos de deportes.

Algunos niños fueron al puesto a cambiar cromos.

M031346A: Berta tenía 5 cromos de animales para cambiarlos por cromos de muñecos. ¿Cuántos cromos de muñecos obtendría?

M031346B: Jaime tenía 8 cromos de animales para cambiarlos por cromos de deportes. ¿Cuántos cromos de deportes obtendría?

M031346C: Catalina tenía 6 cromos de animales. Los quería cambiar por tantos como fuera posible.

¿Cuántos cromos de muñecos obtendría?

¿Cuántos cromos de deportes obtendría?

¿Debería cambiarlos por cromos de muñecos o por cromos de deportes?

M031379: Esteban tenía 15 cromos de deportes para cambiarlos por cromos de animales. ¿Cuántos cromos de animales obtendría?

M031380: Antonio tenía 8 cromos de muñecos para cambiarlos por cromos de deportes. ¿Cuántos cromos de deportes obtendría?

Hemos interpretado como errores de transformación los que llevan a los alumnos a responder que obtendrían:

- 16 o 24 al cambiar los 8 cromos de animales por cromos de deportes en la pregunta M031346B.
- 30 o 45 cromos al cambiar los 15 cromos de deportes por cromos de animales en la pregunta M031379.
- cualquiera de las respuestas que aportan los alumnos de 5.º, apartados M031346C y M031380. En el caso de esta última pregunta hay muchos más alumnos que no han contestado pues al no tener una referencia gráfica explícita no han entendido la pregunta.

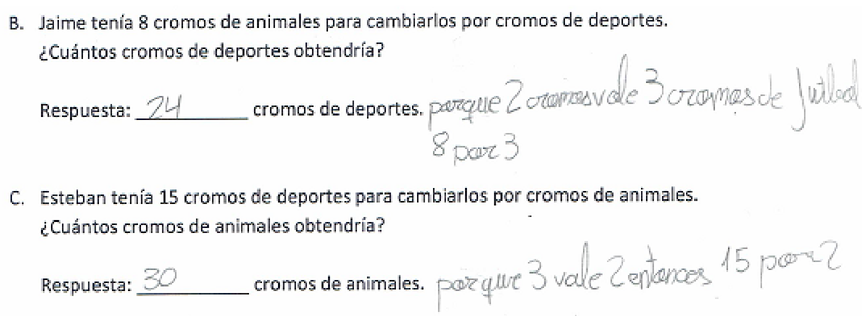
Para estos alumnos el problema se reduce a un problema multiplicativo de una sola etapa. Los alumnos no interpretan correctamente el valor del signo igual como «equivalencia»[23]. Podemos observar que el alumno que ha resuelto correctamente el problema lo hace en términos gráficos; esta es la solución más frecuente entre los alumnos de 4.º curso mientras que los de 5.º lo hacen mayoritariamente a partir de dos operaciones (una división y una multiplicación).

[23]En línea con lo expuesto por Molina (2011, p. 46), «algunos alumnos muestran no prestar atención a las relaciones entre los elementos de la sentencia o a las características particulares de esta, evidenciando cierta rigidez al abordar la resolución de las sentencias solo en un lado de la igualdad, y operan con ella en términos multiplicativos».

Otro de los razonamientos empleados es percibir el conjunto del enunciado gráfico como una serie (alumno 19). Pudimos entender este razonamiento gracias a la explicación de un alumno en la pizarra: «siempre obtienes uno más, por uno de animales tienes dos de muñecos, por dos de muñecos tres de futbol». Esto mismo es lo que parece querer explicar el alumno 18 y el 502 en la figura 2.9.

Tenemos dudas sobre la categorización del error al que conduce este tipo de razonamiento, pues también puede interpretarse como un error de comprensión del tipo E2.2 ya que el alumno sabe transformar en términos matemáticos aquello que responde a su interpretación del enunciado, que no es correcta, pero es la que para él tiene sentido. Esto es así hasta el punto de que cuando un alumno expuso su razonamiento en voz alta llevó a pensar a algunos alumnos de los que tenían bien resuelto el problema que estaban equivocados. Esta disyuntiva al categorizar este tipo de error se nos ha planteado a los tres correctores.

Alumno 6



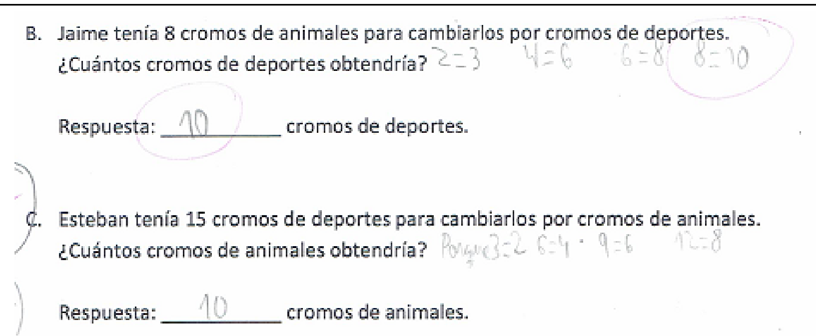
B. Jaime tenía 8 cromos de animales para cambiarlos por cromos de deportes.
¿Cuántos cromos de deportes obtendría?

Respuesta: 24 cromos de deportes. porque 2 cromos vale 3 cromos de futbol 8 por 3

C. Esteban tenía 15 cromos de deportes para cambiarlos por cromos de animales.
¿Cuántos cromos de animales obtendría?

Respuesta: 30 cromos de animales. porque 3 vale 2 entonces 15 por 2

Alumno 17



B. Jaime tenía 8 cromos de animales para cambiarlos por cromos de deportes.
¿Cuántos cromos de deportes obtendría? 2=3 4=6 6=8 8=10

Respuesta: 10 cromos de deportes.

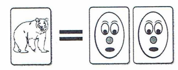
C. Esteban tenía 15 cromos de deportes para cambiarlos por cromos de animales.
¿Cuántos cromos de animales obtendría? Porque 3=2 6=4 9=6 12=8

Respuesta: 10 cromos de animales.

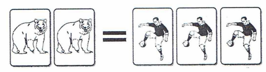
Alumno 27

M031346

1. En la feria del pueblo había un puesto donde la gente podía cambiar cromos.



1 cromo de animales vale por 2 cromos de muñecos.



2 cromos de animales valen por 3 cromos de deportes.

Algunos niños fueron al puesto a cambiar cromos.

✓ A. Berta tenía 5 cromos de animales para cambiarlos por cromos de muñecos.
¿Cuántos cromos de muñecos obtendría?

Respuesta: 10 cromos de muñecos.

$5 \times 2 = 10$

porque si un cromo de animales son dos cromos de muñecos multiplico 5 que son los cromos por 2 de muñecos

✗ B. Jaime tenía 8 cromos de animales para cambiarlos por cromos de deportes.
¿Cuántos cromos de deportes obtendría?

Respuesta: 24 cromos de deportes.

$8 \times 3 = 24$

porque multiplico 8 que son los cromos que tiene por 3 que son los que te dan.

✗ C. Esteban tenía 15 cromos de deportes para cambiarlos por cromos de animales.
¿Cuántos cromos de animales obtendría?

Respuesta: 30 cromos de animales.

$15 \times 2 = 30$

porque 15 son los que tiene y los multiplica por los que te dan.

Alumno 14

B. Jaime tenía 8 cromos de animales para cambiarlos por cromos de deportes.
¿Cuántos cromos de deportes obtendría?

Respuesta: 16 cromos de deportes.

C. Esteban tenía 15 cromos de deportes para cambiarlos por cromos de animales.
¿Cuántos cromos de animales obtendría?

Respuesta: 30 cromos de animales.

Alumno 37

E3

✗ B. Jaime tenía 8 cromos de animales para cambiarlos 4V por cromos de deportes.
¿Cuántos cromos de deportes obtendría?

Respuesta: 16 cromos de deportes.

$2 \times 8 = 16$

Porque hay que multiplicar 2 por 8

✓ C. Esteban tenía 15 cromos de deportes para cambiarlos por cromos de animales.
¿Cuántos cromos de animales obtendría?

Respuesta: 10 cromos de animales.

$15 \div 3 = 5$, resto 00

Porque hay que dividir para saver chantos

$5 \times 2 = 10$

cromos de futbol son

Alumno 19

B. Jaime tenía 8 cromos de animales para cambiarlos por cromos de deportes.
¿Cuántos cromos de deportes obtendría?

Respuesta: 9 cromos de deportes.

$$\begin{array}{r} 8 \\ +\ 1 \\ \hline 9 \end{array}$$

C. Esteban tenía 15 cromos de deportes para cambiarlos por cromos de animales.
¿Cuántos cromos de animales obtendría?

Respuesta: 16 cromos de animales.

$$\begin{array}{r} 15 \\ +\ 1 \\ \hline 16 \end{array}$$

Alumno 546

5.- Antonio tenía 8 cromos de muñecos para cambiarlos por cromos de deportes.
¿Cuántos cromos de deportes obtendría?

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 4 \\ \hline 4 \text{ de animales} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 \\ +\ 2 \\ \hline \boxed{6} \end{array}$$

Obtendrá 6 porque 8 de muñecos son 4 de animales y estos son 6 de deportes

Alumno 18

B. Jaime tenía 8 cromos de animales para cambiarlos por cromos de deportes.
¿Cuántos cromos de deportes obtendría?

Respuesta: 9 cromos de deportes.

E 9.8

C. Esteban tenía 15 cromos de deportes para cambiarlos por cromos de animales.
¿Cuántos cromos de animales obtendría?

2

Respuesta: 14 cromos de animales.

Porque 1 cromo = 2 cromos de muñecos y ... =+1
2 cromos de animales valen 3 de deportes =+1 . .

Alumno 545

1. Berta tenía 5 cromos de animales para cambiarlos por cromos de muñecos.
   ¿Cuántos cromos de muñecos obtendría?
   $5+2=7$
   Porque los cromos de muñecos tienen menos valor que los de animales

2. Jaime tenía 8 cromos de animales para cambiarlos por cromos de deportes.
   ¿Cuántos cromos de deportes obtendría?
   $8+1=9$ Tienen menos valor que el de los animales

3. Catalina tenía 6 cromos de animales. Los quería cambiar por tantos como fuera posible.
   ¿Cuántos cromos de muñecos obtendría? $6+2=8$
   ¿Cuántos cromos de deportes obtendría? $6+1=7$ Tienen menos valor que los de animales
   ¿Debería cambiarlos por cromos de muñecos o por cromos de deportes?
   De muñecos

4.- Esteban tenía 15 cromos de deportes para cambiarlos por cromos de animales.
¿Cuántos cromos de animales obtendría?
$15-1=14$ Porque el de animales vale más

Alumno 502

B. Jaime tenía 8 cromos de animales para cambiarlos por cromos de deportes.
¿Cuántos cromos de deportes obtendría?

Respuesta: 9 cromos de deportes.

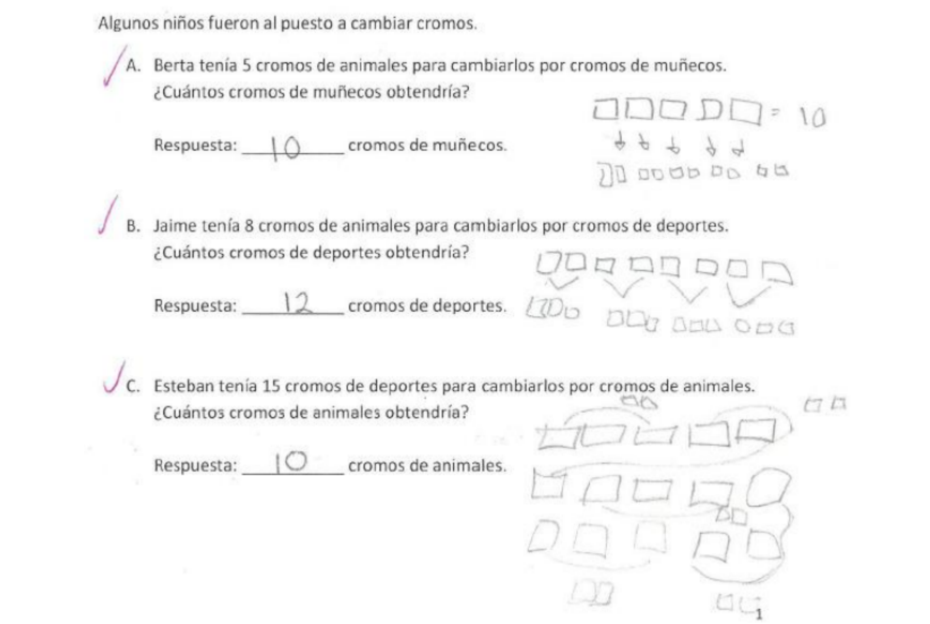
$8 + 1 = 9$ (cromos de deportes)

C. Esteban tenía 15 cromos de deportes para cambiarlos por cromos de animales.
¿Cuántos cromos de animales obtendría?

Respuesta: 14 cromos de animales.

$15 - 1 = 14$ (cromos de animales)

Alumno 17



Algunos niños fueron al puesto a cambiar cromos.

A. Berta tenía 5 cromos de animales para cambiarlos por cromos de muñecos. ¿Cuántos cromos de muñecos obtendría?

Respuesta: 10 cromos de muñecos.

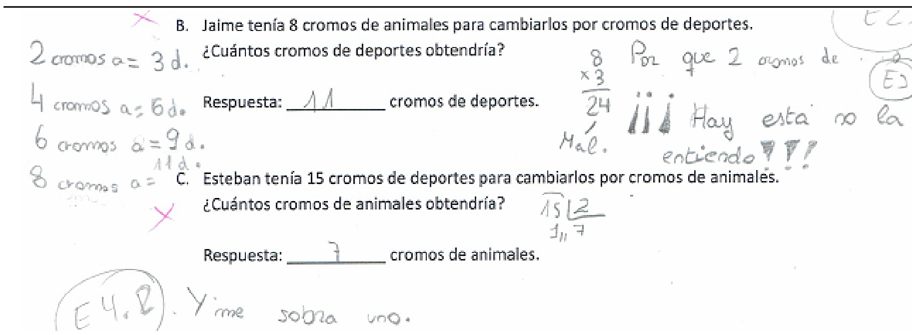
B. Jaime tenía 8 cromos de animales para cambiarlos por cromos de deportes. ¿Cuántos cromos de deportes obtendría?

Respuesta: 12 cromos de deportes.

C. Esteban tenía 15 cromos de deportes para cambiarlos por cromos de animales. ¿Cuántos cromos de animales obtendría?

Respuesta: 10 cromos de animales.

Alumno 15



B. Jaime tenía 8 cromos de animales para cambiarlos por cromos de deportes. ¿Cuántos cromos de deportes obtendría?

Respuesta: 11 cromos de deportes.

2 cromos a = 3 d.
4 cromos a = 6 d.
6 cromos a = 9 d.
8 cromos a = 11 d.

Por que 2 cromos de ... ¡¡¡ Hay esta no la entiendo !!!

C. Esteban tenía 15 cromos de deportes para cambiarlos por cromos de animales. ¿Cuántos cromos de animales obtendría?

Respuesta: 7 cromos de animales.

E4.2. Y me sobra uno.

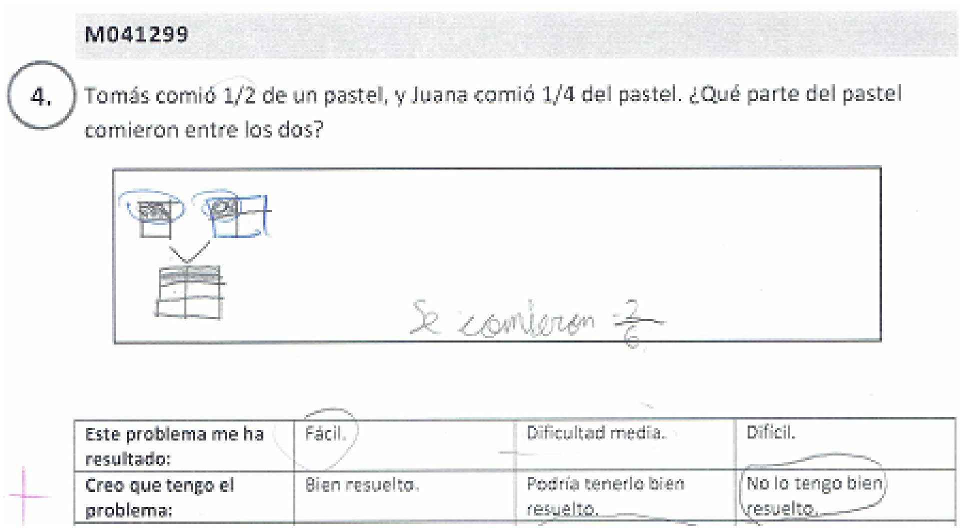
Figura 2.9: Errores de transformación. Pregunta M031346 y sus apartados.

- Pregunta M041299: Tomás comió 1/2 de un pastel, y Juana comió 1/4 del pastel. ¿Qué parte del pastel comieron entre los dos?

En el problema M041299 (números-fracciones, conocer) la mayor parte de los alumnos llegan a hacer el dibujo que corresponde a las porciones de pastel[24] que come cada uno de los implicados en el problema, pero no saben pasar a una solución ni gráfica ni numérica que les permita dar la respuesta correcta (más adelante observaremos que hay alumnos que son capaces de llegar a la expresión matemática o la representación gráfica correcta pero no sabrán operar las fracciones o interpretar correctamente el dibujo). En la figura 2.10 se muestra el caso del alumno 531 (de 5.º curso), que es capaz de entender que no llegan a comer el pastel completo, pero no sabe determinar cuánto es lo que comen. Los alumnos parecen no ser capaces de identificar la unidad sobre la que hay que actuar, en este caso la tarta completa.

La mayor parte de los alumnos de cuarto curso que responden correctamente a este problema lo hacen a partir de un planteamiento gráfico, mientras que en quinto curso son mayoría los alumnos que hacen un planteamiento numérico. Varios alumnos dan la solución numérica sin más explicaciones.

Alumno 87


M041299

4. Tomás comió 1/2 de un pastel, y Juana comió 1/4 del pastel. ¿Qué parte del pastel comieron entre los dos?

Se comieron $\frac{2}{6}$

Este problema me ha resultado:	Fácil.	Dificultad media.	Difícil.
Creo que tengo el problema:	Bien resuelto.	Podría tenerlo bien resuelto.	No lo tengo bien resuelto.

[24]Las representaciones son variadas, no se limitan a la «pizza redonda», sino que encontramos también diferentes barras y cuadrados.

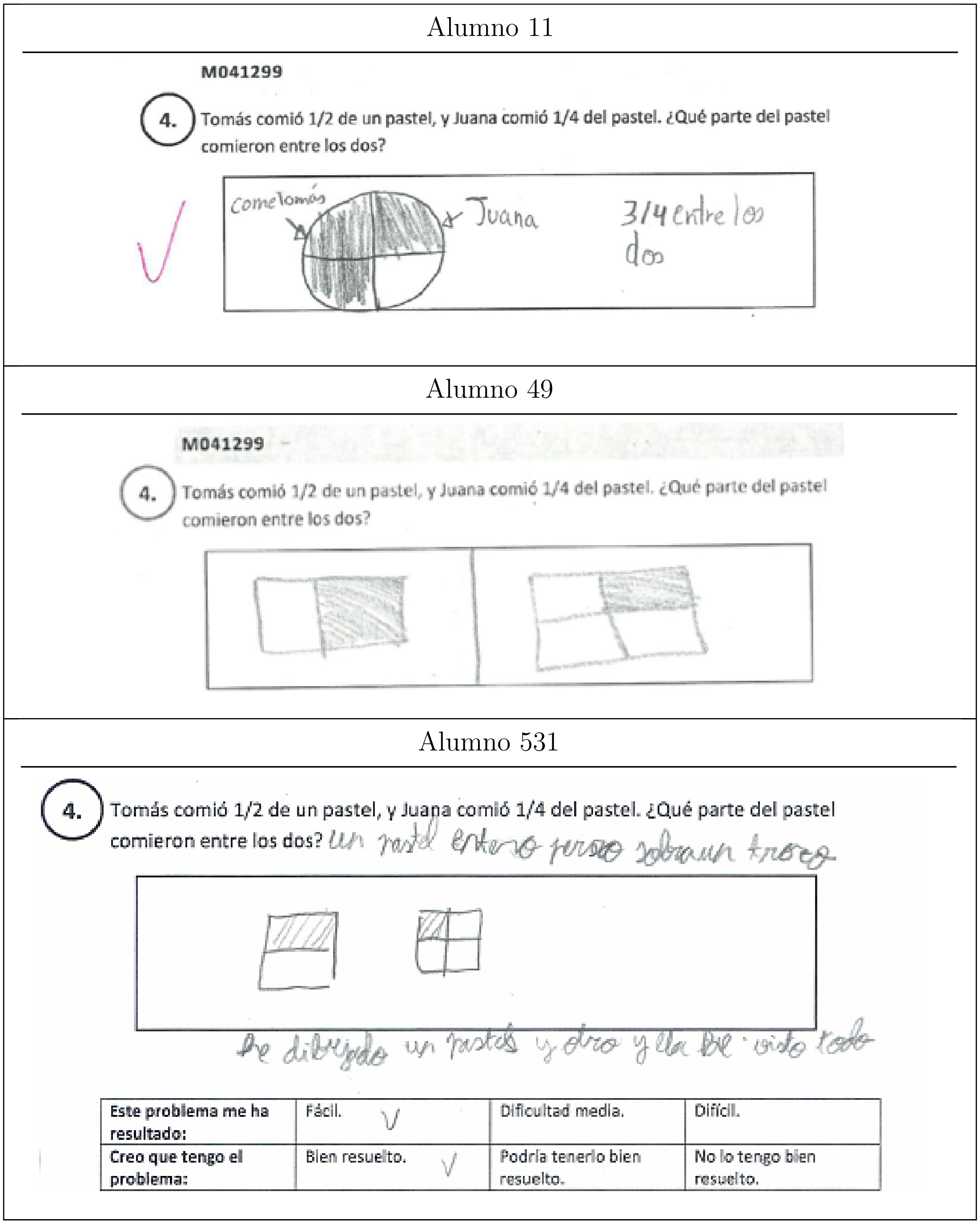
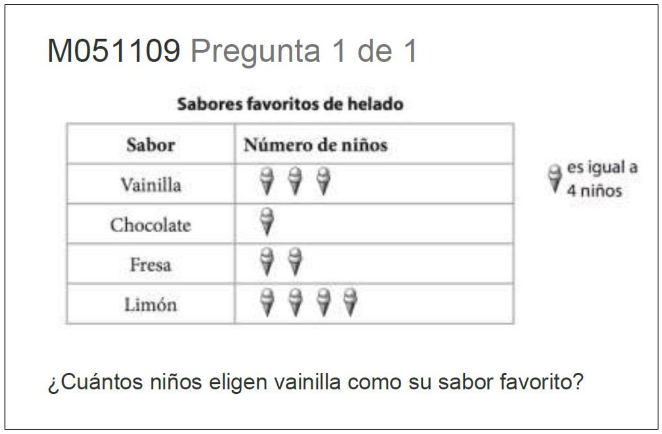


Figura 2.10: Errores de transformación en la pregunta M041299 y solución correcta.

En el problema M051109 (sabores favoritos de helado) del bloque datos-leer y conocer, el enunciado es el siguiente:


M051109 Pregunta 1 de 1

Sabores favoritos de helado

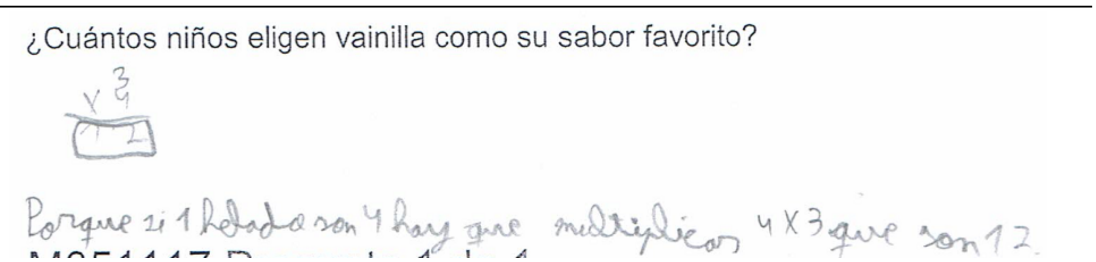
Sabor	Número de niños
Vainilla	🍦🍦🍦
Chocolate	🍦
Fresa	🍦🍦
Limón	🍦🍦🍦🍦

🍦 es igual a 4 niños

¿Cuántos niños eligen vainilla como su sabor favorito?

En la figura 2.11 se muestra un ejemplo de solución correcta y un ejemplo del error más extendido. El 57 % de los alumnos de quinto curso han dado la misma respuesta errónea a esta pregunta: «tres niños eligen vainilla». Creemos que utilizar como símbolo de un grupo de cuatro helados el mismo dibujo que ya representa en sí mismo la unidad no es lo más acertado. Es parecido a utilizar para la decena el mismo símbolo que utilizamos para la unidad.

Alumno 545



Alumno 546

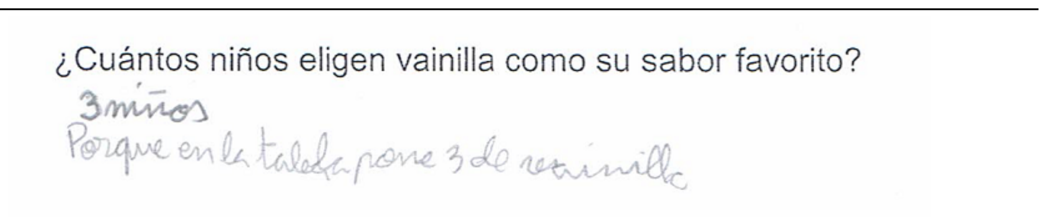


Figura 2.11: Errores en la pregunta M051109.

Propuestas de trabajo sobre los errores de transformación

Hemos visto que estos errores están muy vinculados al conocimiento que los alumnos tienen sobre los contenidos trabajados en los problemas y que a pesar de presentarse en contextos que podrían resultarles familiares y accesibles a veces el alumno no es capaz de reconocer en ellos lo ya trabajado en clase. Por esto es importante en primer lugar cuidar la redacción y los términos en los que se formula la pregunta, trabajar variedad de representaciones para cada concepto y enseñar a los alumnos a plantear un buen dibujo sobre el problema. Para la mayoría de las preguntas un buen dibujo de la situación-problema lleva directamente a la respuesta correcta sin necesidad de cálculos. Yancey, Thompson y Yancey (1989) defienden el uso de dibujos para resolver problemas como una de las técnicas heurísticas más exitosas gracias a que minimizan la demanda sobre los recursos memorísticos, ayudan al alumno a interpretar la situación problema y focalizarse en los hechos y datos relevantes, al tiempo que ayuda a visualizar la relación entre ellos. Además, el grado de abstracción y dificultad de las representaciones gráficas puede irse adaptando a la etapa educativa. Hemos podido comprobar que es necesario enseñar la técnica en clase y que hay que mostrar qué es un buen dibujo en matemáticas (el que muestra la historia del problema, los datos y sus relaciones) y que la calidad viene determinada por estas características y no por su valor artístico.

Otra de las actitudes a desarrollar en el aula de matemáticas es la verbalización por parte del profesor de su proceso de pensamiento. El maestro debería hacer en clase exactamente aquello que está demandando de sus alumnos: pensar en voz alta mientras está resolviendo los problemas, pues con eso brinda a los alumnos la oportunidad de aprender a hacerlo.

Son varias las investigaciones que avalan el papel de las habilidades verbales en el éxito académico; la forma en la que los niños hablan y se explican en la clase de matemáticas es un buen predictor de las habilidades aritméticas a lo largo de la Educación Primaria (Durand, Hulme, Larkin y Snowling, 2005) y del rendimiento en la resolución de problemas (Watson et al., 2003; Fuchs et al., 2006). Este saber hacer en la resolución de problemas puede verse potenciado fomentando la participación activa de los alumnos en el aula. El grado de participación de los alumnos y su capacidad crítica para adaptarse a las ideas de sus compañeros durante la resolución de problemas en pequeño grupo están positivamente relacionados con la capacidad de resolver problemas eficazmente (Webb et al., 2009).

Las discusiones durante las sesiones de revisión nos proporcionan la oportunidad de entender la lógica que subyace al pensamiento de los alumnos y que les conduce algunas veces a errores de comprensión y transformación. En línea con lo que apunta Bruner (1974) hemos podido comprobar que hay alumnos que no consiguen explicar cómo hacen algunas cosas, pero al volver sobre su propia conducta tienen la oportunidad de reflexionar sobre ello y estamos con ello indicándoles el camino hacia la metacognición entendida en este contexto como la reflexión sobre mi forma de pensar y hacer. Como también indica este mismo autor, la capacidad para verbalizar la estrategia empleada no es una característica necesaria para el desarrollo de estrategias de resolución. Finalmente, hemos encontrado a lo largo de la intervención alumnos que alcanzan soluciones numéricamente correctas pero con planteamientos y resoluciones erróneas (esto se da principalmente ligado a los errores que analizamos a continuación) y en estos casos la mitificación que tenemos sobre la solución numérica hace especialmente complicado dar con las preguntas que les hagan reflexionar sobre lo erróneo de su razonamiento.

5.3. Errores de procedimiento

Este tipo de errores se corresponden con dificultades a la hora de ejecutar las operaciones seleccionadas o seguir el plan establecido. Hay una extensa bibliografía sobre el estudio de estos errores, pues como indica Radatz (1980) la mayor parte de los trabajos sobre análisis de errores se han centrado en el estudio de errores aritméticos. Esto no es sorprendente, pues los sistemas educativos están muy centrados en la enseñanza del algoritmo y potencian las habilidades de cálculo del alumno sin prestar suficiente atención a la comprensión.

Los problemas donde este tipo de errores se presentan con mayor frecuencia se listan en la tabla 2.21. Hemos optado por subdividir estos errores en cinco categorías tal y como se describieron en la tabla 2.15. Comentamos someramente todos ellos para centrarnos después en las preguntas en las que se han dado con mayor asiduidad.

Errores del tipo E4.1 (representan el $7{,}2\,\%$ de los errores de procedimiento): bajo este código hemos agrupado los problemas en los que el alumno escoge una o varias operaciones al azar a partir de los datos que se presentan en el problema. Encontramos ejemplos de este tipo de error en la figura 2.12. Este error está muy ligado a una falta de comprensión del problema y del significado que a las operaciones le otorga el alumno. Hemos encontrado aquí dos perfiles de alumnos diferentes:

Tabla 2.21: Preguntas con mayor frecuencia de errores de procedimiento.

Código de pregunta	Número de errores	Código de pregunta	Número de errores
4.º CURSO		5.º CURSO	
M041098	51	M041098	42
M031379	38	M031379	15
M041299	30	M041299	14
M031346B	17	M051007	14
M051601	14	M051305	13
M031346A	10	M051203	12
M051117	3	M051123	11
M051091	1	M051601	8
M041184	1	M031380	7
M051123	1	M041158	7
		M031185	7

Fuente: elaboración propia.

- Alumnos que alcanzan a identificar las etapas que plantean el problema en aquellos casos de problemas de dos o más etapas. Estos alumnos plantean tantas operaciones como etapas creen haber identificado.

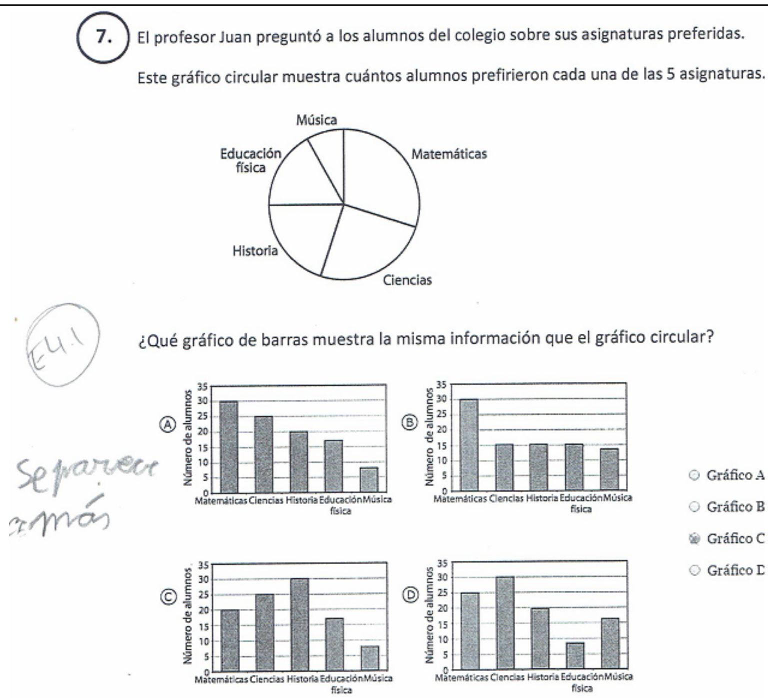
- Alumnos que, con una sola operación que involucra a todos los términos numéricos que identifican en el problema, dan respuesta a la pregunta planteada.

En los errores del tipo E4.2 (que representan el $27{,}2\,\%$ de los errores de procedimiento), el alumno escoge la operación correcta pero no interpreta el resultado de esta en la forma adecuada. Este error se plantea con mayor frecuencia en los problemas que llevan asociada una división que no tiene el significado de reparto equitativo, como en el caso del problema M041198 (latas de pintura) sobre el que hablaremos con detalle más adelante.

Los errores del tipo E4.3 (son el $36{,}7\,\%$ de los errores de procedimiento) son errores en la ejecución del algoritmo o el cálculo. Este error se ha dado fundamentalmente en el problema M041299 (fracción de tarta comida), M051203 (cálculo de 23×19). Ambos se comentan más adelante.

Errores por omisión, tipo E4.4 (son el $4{,}4\,\%$ de los errores de procedimiento): este tipo de error es más fácil de percibir en los problemas de dos etapas, en los que el alumno completa correctamente una parte de ellas pero no sabe proceder con la segunda, bien porque no la ha identificado o bien porque pierde el hilo de su pensamiento. Este error se ha dado fundamentalmente en los problemas M031379 y M031380 (ambos apartados del intercambio de cromos, los alumnos llegan a hacer la primera operación, pero no avanzan hacia la segunda).

Actividad M041184. Alumno 3



Actividad M031346. Alumno 10

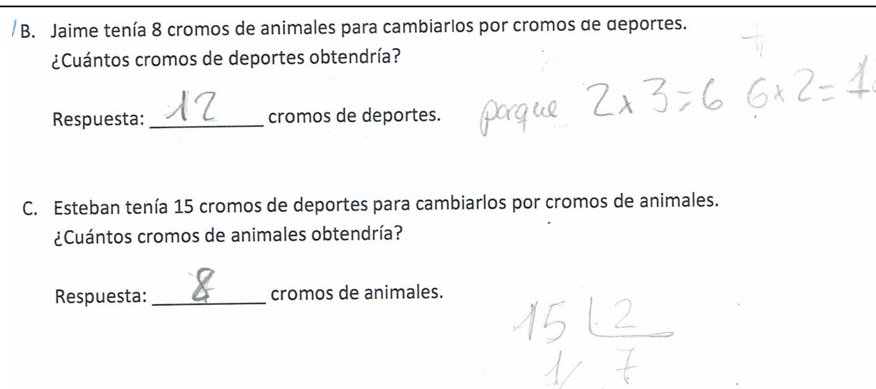


Figura 2.12: Errores de procedimiento de tipo 4.1.

En los errores codificados como E4.5 (son el $24{,}4\,\%$ de los errores), no encontramos explicación plausible de lo que ha hecho el alumno.

Errores de tipo 4.1

Este tipo de error está muy ligado a los errores de comprensión: el alumno identifica los números que aparecen en el texto y opera con ellos. Como hemos podido observar en el trabajo con los alumnos de tercero y cuarto que analizamos en los capítulos siguientes, la operación seleccionada viene muchas veces determinada por aquella con la que el alumno se encuentra más a gusto o la que recientemente se ha trabajado en clase. Es difícil que el alumno consiga explicar el porqué o cómo ha llegado a ello, y lo más que han alcanzado a decirnos son expresiones del tipo «mira los números, estos son los que hay que usar». En esta ocasión solo hemos considerado como errores de este tipo aquellos en los que hemos hablado con los alumnos y en base a sus explicaciones hemos deducido que se trataba de este tipo de errores. En el ejemplo de la figura 2.12, el alumno 10 nos explicó que «al cambiar cromos de animales por cromos de deportes tenía que obtener más de deportes, y dos de animales se cambian por tres de deportes, dos paquetes de dos nos dan seis pero esto no son más, así es que $6 \times 2 = 12$»[25]. En el caso del alumno 3, ha escogido la opción C pues «ciencias y matemáticas son las que más tienen y a mí me parece que es esta» (señala la opción escogida).

Errores del tipo 4.2

En la pregunta M041098 (bloque números, aplicar) los alumnos determinan fácilmente la operación aritmética necesaria para contestar: una división o una multiplicación. Una vez que han decidido la operación que deben utilizar parecen no tener presente la pregunta planteada. Además, la falta de hábito de comprobar la coherencia de la solución encontrada con los requisitos del problema, les lleva a seleccionar una respuesta incorrecta. Pedimos a la alumna 18 (figura 2.13) que explicara su solución y a continuación participan en el diálogo más alumnos que enumeramos secuencialmente; el diálogo empieza con un alumno que ha dejado su respuesta en blanco, pero ha planteado la operación 37×5, (en todas las aulas se han dado soluciones erróneas iguales a las que aquí discutimos):

A1: Compra 37 latas, 37×5. [Hace la multiplicación en voz alta]. 185.

[25]Sin las notas al margen del alumno la respuesta que aparece en el test se habría considerado correcta.

I: Y, entonces ¿qué has comprado?

A1: Pues que he comprado 185 litros... pero no está la respuesta.

I: ¿He comprado 185 litros?

A1: Sí.

I: He comprado 185 litros, ¿Necesito 185 litros?

A1: No, bueno..., no lo sé.

I: ¿Quién nos puede ayudar?

A18: Pues sumo 5 más 5 y 5 hasta 40 litros, pero como necesita 37 litros, 40 menos 37 te dan 3, y ya tienes los litros que necesitas.

I: Y el problema te pregunta..., ¿cuántas latas hay que comprar o cuántos litros necesitas?

A18: Eh... compras 8 latas.

I: Vale ahora sí, contadme otras maneras de hacerlo.

A2: ¿Multiplicándolo?

I: ¿Qué x qué?

A2: 8×5.

I: ¿Por qué 8×5?, ¿tú de entrada sabes que son 8×5 lo que tienes que multiplicar?

A2: De entrada... no, pero lo sé.

I: Si empiezo desde el principio, ¿tú cómo haces este problema? (El profesor lee el problema).

A2: Busco qué es lo que más se acerca a 37 y después lo hago.

I: Vale, y, ¿tenemos otra manera de hacerlo? [Silencio, el profesor insiste]. Otra manera [tiene que insistir y dirigirse a un alumno que ha plateado una división].

A3: 37 entre 5.

I: Y qué estoy haciendo cuando 37 litros lo divido entre 5 litros en cada lata, ¿qué estoy buscando?

A3: Las latas.

I: ¿Cuánto es 37 dividido entre 5?

A3: 7 y me sobran 3.

I: ¿Entonces tengo que comprar 7 latas?

A18 No, pues 8... porque 8×5 son 40 y ya tengo los litros que necesitas.

— (El profesor pregunta qué pasa si compro 7 latas y parece claro que la mayoría entiende que no hay pintura suficiente para pintar).

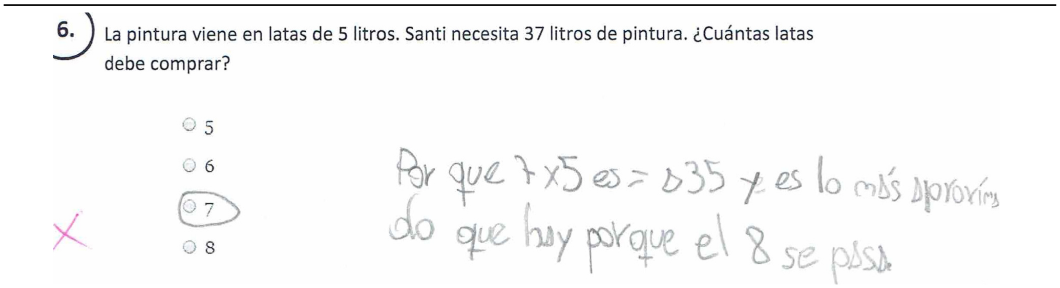
I: Ahora, pensad un problema que la solución sea esa, señalando la operación $37 \times 5 = 185$.

A2: Pues cualquiera.

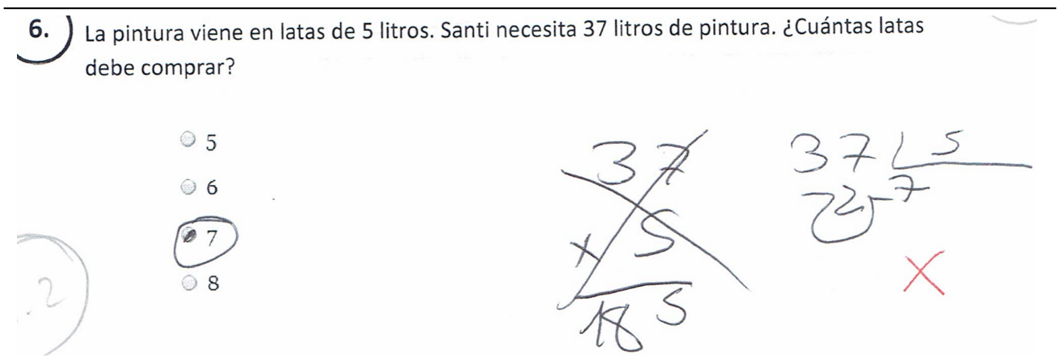
I: Si me vale cualquier problema, ¿por qué no me vale para el problema que acabamos de resolver? (Un alumno plantea un problema cuya solución es $37 - 5$ y se discute).

A4: En una excursión van 5 autobuses y en cada autobús van 37 niños, ¿cuántos niños van de excursión? (Co. P39)

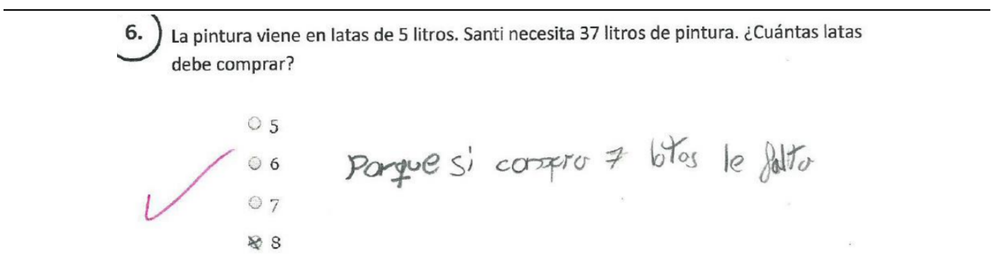
Alumno 2



Alumno 503



Alumno 4



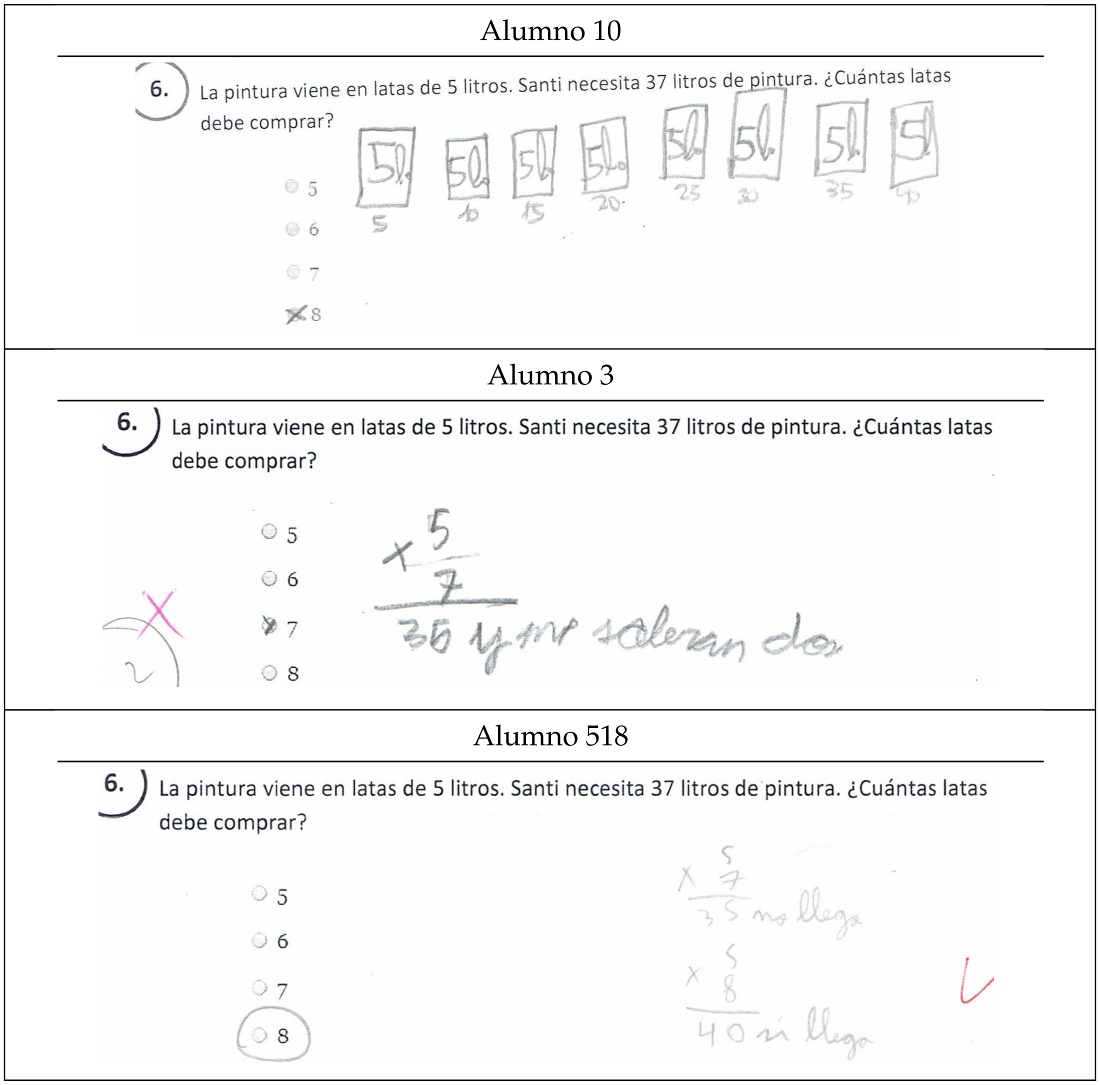


Figura 2.13: Errores de procedimiento de tipo E4.2 y soluciones correctas en la pregunta M041098.

Errores de tipo 4.3

En los errores de este tipo el alumno ejecuta mal el algoritmo de la operación que ha planteado. En el problema M041299, «fracción de tarta que se han comido entre Tomás y Juana», los alumnos cometen el grave error de sumar los numeradores y los denominadores de las fracciones involucradas: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{6}$.

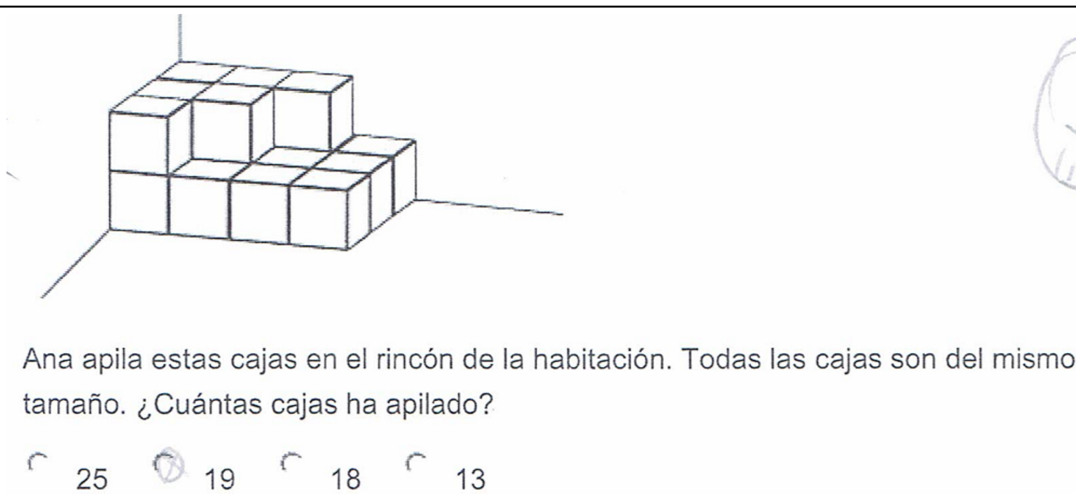
Nos resulta llamativo a la vez que preocupante la disposición en vertical de los dos sumandos que hacen algunos alumnos, y nos llama la atención que se ha dado en todos los centros, no en uno y una clase en particular. Incluso hay un alumno de quinto curso (el 507 en la figura 2.14), que llega a hacer la suma correctamente.

Por otro lado, creemos que el hecho de hacer dos dibujos independientes es lo que induce a muchos alumnos a dar como respuesta $\frac{2}{6}$ pues ellos ven dos de las seis partes coloreadas. El alumno 518 (véase la figura 2.16) aplica este mismo procedimiento también para la resta que plantea en el problema (su error ha sido catalogado como 4.5 pues no encontramos explicación plausible para lo que expone).

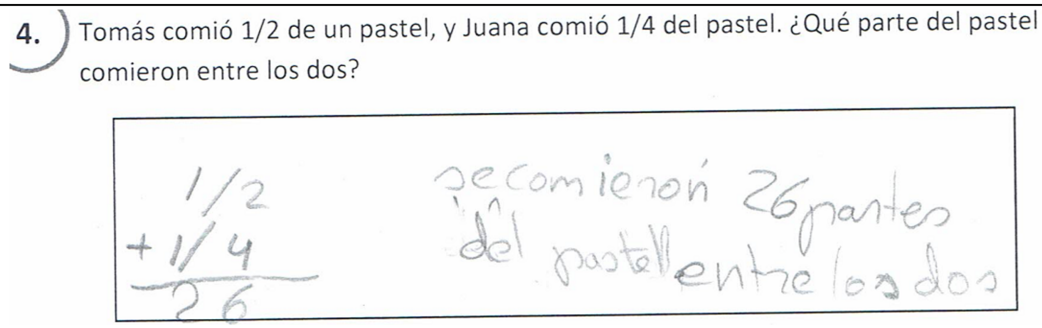
El resto de los errores son los esperados al hacer una operación. En el caso del alumno 555 en el problema M041158 cuando se le ha pedido que explicara cómo había llegado a contar 19 se pudo comprobar que era un error al hacer la suma de los cubos de la primera fila, $3 \times 4 = 12$, y los seis que llega a contar en la segunda.

El error cometido por el alumno M051305 denota también falta de comprensión del sistema decimal. Ha sido el único tipo de error que se ha dado en este problema, ningún alumno de los que han contestado mal han elegido las otras dos opciones que tampoco son correctas.

Actividad M041158. Alumno 555



Actividad M041299. Alumno 65

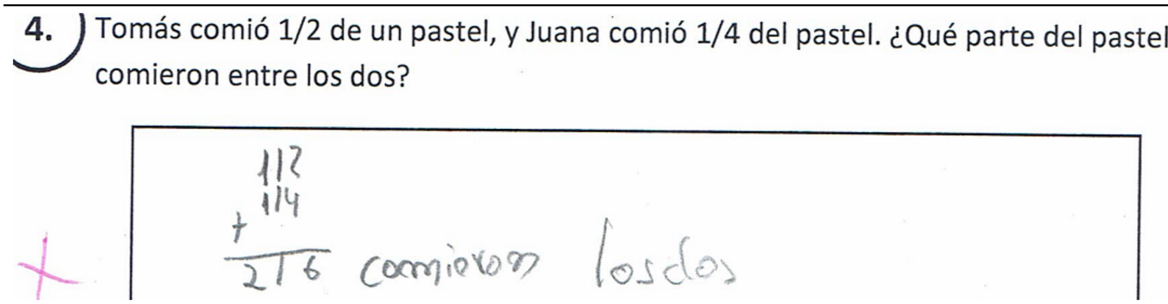


4. Tomás comió 1/2 de un pastel, y Juana comió 1/4 del pastel. ¿Qué parte del pastel comieron entre los dos?

1/2
+1/4
26

se comierón 26 partes del pastell entre los dos

Actividad M041299. Alumno 5



4. Tomás comió 1/2 de un pastel, y Juana comió 1/4 del pastel. ¿Qué parte del pastel comieron entre los dos?

1/2
+ 1/4
2/6 comieron los dos

M051203. Alumno 548

M051203 Pregunta 1 de 1

23 x 19 = 47

Actividad M051305 Alumno 548

Daniel recorrió primero 4,8 km en coche y después 1,5 km en autobús. ¿Qué distancia recorrió Daniel?

4,8+1,5=5,13 Km

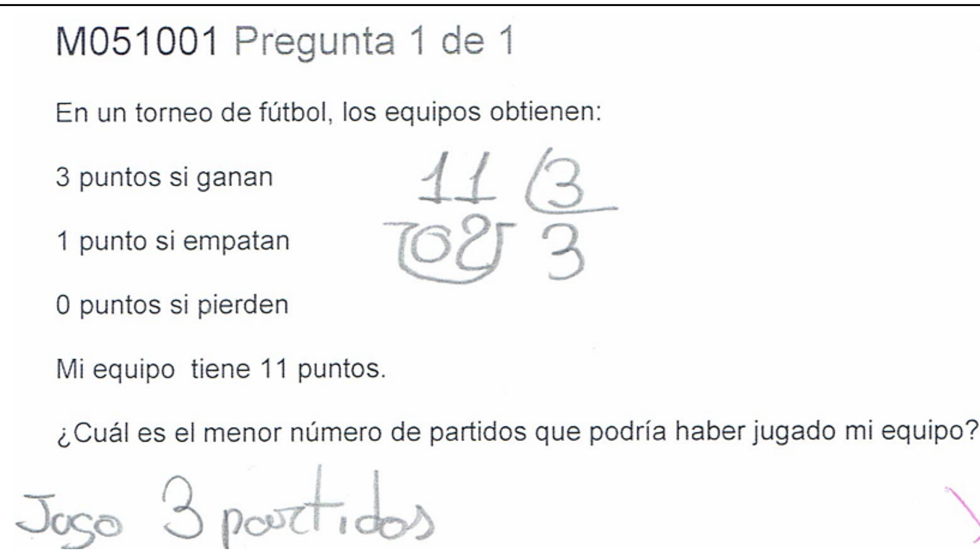
6,3 km — 5,8 km — 5,13 km — 4,95 km

Figura 2.14: Errores de procedimiento de tipo E4.3 en diferentes preguntas.

Errores de tipo 4.4

El alumno empieza a resolver el problema correctamente pero no llega a la solución final. Se han encontrado pocos ejercicios que muestren este tipo de error, básicamente porque en los test hay pocos problemas que requieran más de una operación. Por otro lado, para que este error sea considerado como tal creemos que hay que tener la seguridad de que el alumno crea haber contestado a la pregunta completamente y que haya hecho algún tipo de comprobación sobre su respuesta y la pregunta. Por ejemplo, en el problema M051001 (problema del torneo de fútbol del Test II) hemos encontrado varios alumnos (como el alumno 581 en la figura 2.15) que dividen el número de puntos obtenidos por su equipo, once, entre el máximo de puntos que se pueden obtener al ganar, tres, y contestan que los partidos jugados han sido tres. En este caso creemos que el alumno ha cometido un error de comprensión: ha confundido ganados con jugados.

Acitividad M051001. Alumno 581


M051001 Pregunta 1 de 1

En un torneo de fútbol, los equipos obtienen:

3 puntos si ganan

1 punto si empatan

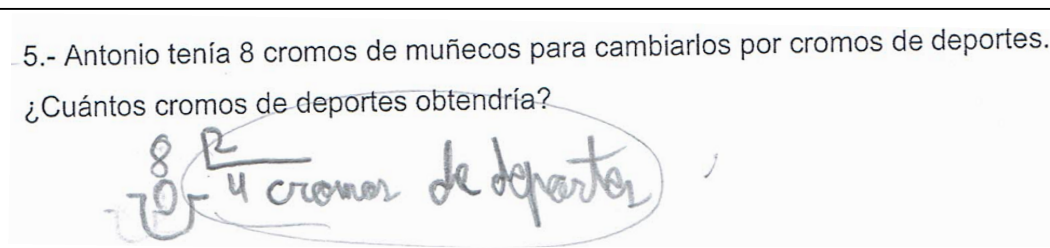
0 puntos si pierden

Mi equipo tiene 11 puntos.

¿Cuál es el menor número de partidos que podría haber jugado mi equipo?

Jugo 3 partidos

Actividad M0831380. Alumno 550


5.- Antonio tenía 8 cromos de muñecos para cambiarlos por cromos de deportes.

¿Cuántos cromos de deportes obtendría?

4 cromos de deportes

Actividad M031379. Alumno 560

4.- Esteban tenía 15 cromos de deportes para cambiarlos por cromos de animales.

¿Cuántos cromos de animales obtendría?

15 | 3
0 5 cromos obtendría. Porque 3 cromos de deportes eran 2 de animales, así que tienes que hacer grupos de 3 y salen 5.

Actividad M031379. Alumno 4

C. Esteban tenía 15 cromos de deportes para cambiarlos por cromos de animales.
¿Cuántos cromos de animales obtendría?

Respuesta: 5 cromos de animales. Porque 15 entre 3 son 5

Figura 2.15: Errores de procedimiento tipo E4.4.

Errores de tipo 4.5

Hemos encuadrado en esta categoría todos aquellos errores para los que no hemos conseguido encontrar ninguna explicación. En la bibliografía consultada este tipo de error se clasifica siempre dentro del apartado errores de procedimiento, incluso dentro de los errores aleatorios, pero algunos de los que hemos encontrado estamos muy inclinados a pensar que son errores de comprensión y transformación, pero al no saber darles una explicación han pasado a formar parte de esta especie de «cajón de sastre».

Actividad M041003. Alumno 551

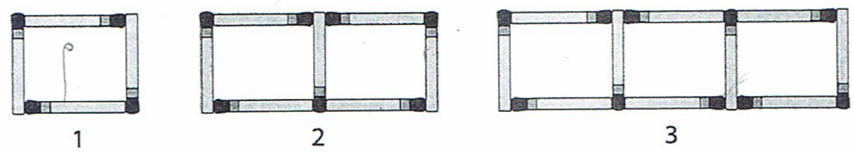
Ana tiene estas tarjetas con números en ellas.

1	8	6	5	2

¿Cuál es el número de tres dígitos más pequeño que puede mostrar con esas tarjetas? Sólo puede usar una vez cada tarjeta.

Actividad M051601. Alumno 554

Carlos sigue la misma regla cada vez para formar la siguiente figura de la serie.



¿Cuántas cerillas necesitará para formar la figura 4?

necesita 6 cerillas

Actividad M041299. Alumno 518

4. Tomás comió 1/2 de un pastel, y Juana comió 1/4 del pastel. ¿Qué parte del pastel comieron entre los dos?

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$

$\frac{1}{10}-\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$ queda

Actividad M051007. Alumno 554

María continúa circulando a la misma velocidad hacia Branda. ¿Cuántas horas tardará en llegar a Branda, contando a partir de la señalización?

E4.5

Ⓐ $1\frac{1}{2}$ hora

Ⓑ 2 horas

Ⓒ 3 horas

Ⓓ $3\frac{1}{2}$ horas

Porque primero 2 horas en 30 k y 45 Km luego que serán en total $3\frac{1}{2}$ horas,

Opción A Opción B Opción C Opción D

Figura 2.16: Errores de procedimiento de tipo E4.5.

Tabla 2.23: Preguntas con mayor frecuencia de errores de codificación.

Código de pregunta	Número de errores	Código de pregunta	Número de errores
4.º CURSO		5.º CURSO	
M051601	9	M051123	4
M041299	6	M041299	3
M051091	1	M051601	3
		M051091	1

Fuente: elaboración propia.

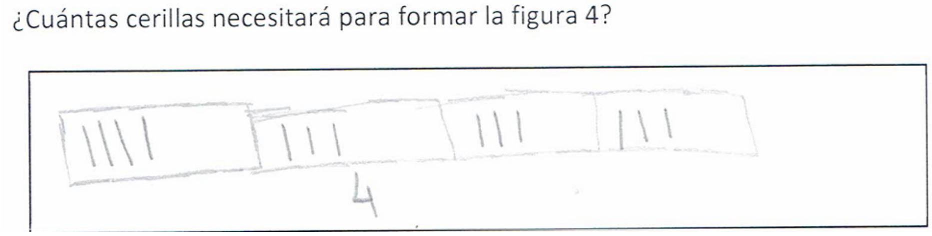
5.4. Errores de codificación

En este tipo de errores el alumno no es capaz de dar una respuesta bien construida al problema: ejecuta correctamente las operaciones matemáticas, las deja bien planteadas, pero no deja constancia escrita de una respuesta a la pregunta plateada en el problema.

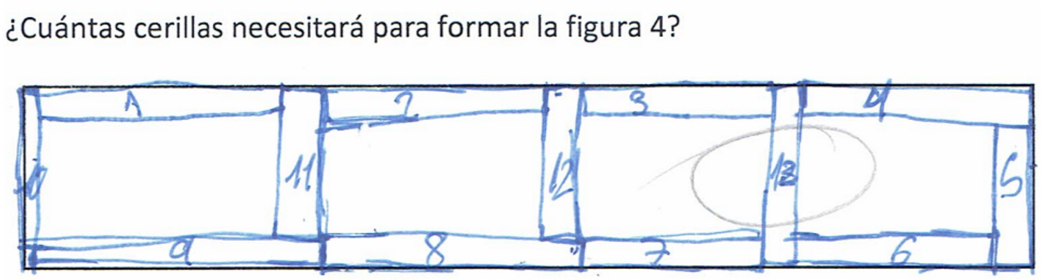
Han sido muy pocos los errores de este tipo pues por la naturaleza del test solo pueden darse en las preguntas de respuesta abierta, y se han dado fundamentalmente en dos problemas: M051601 (números-patrones-aplicar) y M041299 (números-fracciones-conocer). En este último problema, que pide determinar la cantidad de tarta que se han comido entre dos personas y del que ya hemos hablado, hemos concluido que este tipo de error se da cuando el alumno ha planteado el problema correctamente de forma gráfica pero no llega a dar una solución numérica o una frase escrita en la que se informe sobre la cantidad de tarta comida.

En el problema M051601, los alumnos son capaces de dibujar el cuarto término de la serie, pero no llegan a responder de manera concreta el número de cerillas que son necesarias para construirlo, que es lo que se está preguntando, y que es la única respuesta aceptada como válida en la prueba oficial. En la figura 2.17 mostramos algunos ejemplos de este tipo de errores.

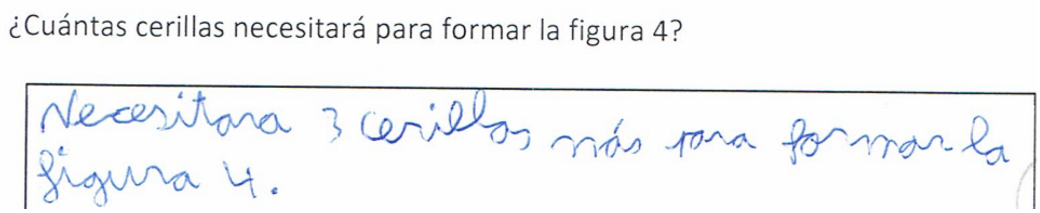
Actividad M051601. Alumno 54



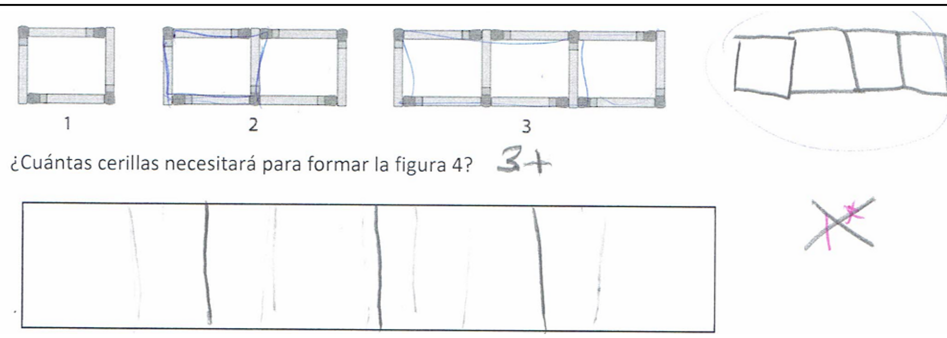
Actividad M051601. Alumno 37



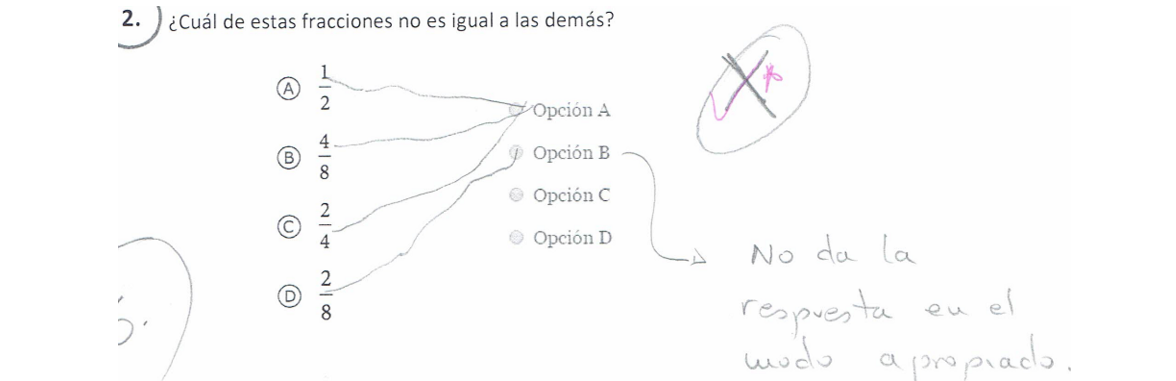
Actividad M051601. Alumno 47



Actividad M051601. Alumno 73



Actividad M051091. Alumno 100



Actividad M041299. Alumno 102

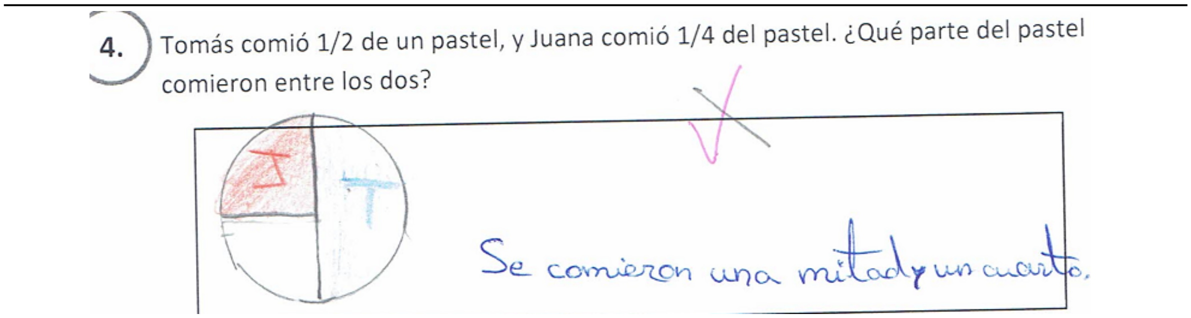


Figura 2.17: Errores de codificación.

5.5. Errores por descuido

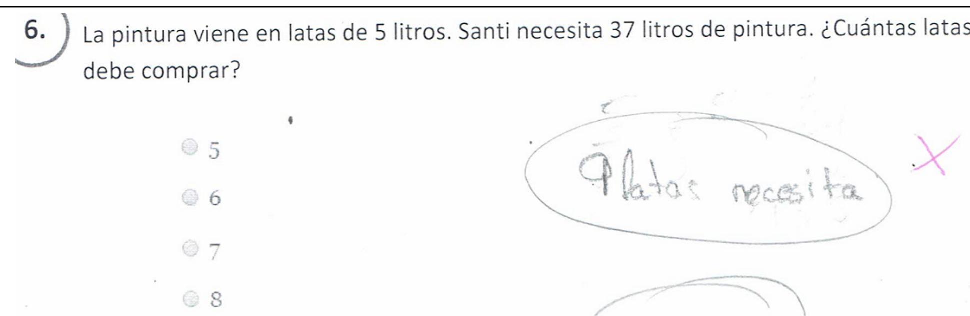
En este bloque se incluyen todo tipo de «despistes»: el alumno entiende el problema, sabe darle solución pero se confunde y contesta a otra pregunta. La mayor parte de estos errores se han dado en el problema M041003 (como en el caso del alumno 544 en la figura 2.18). Los alumnos han configurado el número de cinco cifras menor posible con todas las tarjetas que se les ofrecían, en lugar de configurar el de tres cifras tal y como pide el enunciado, o bien en lugar de formar el número de tres cifras más pequeño han formado el mayor de los posibles.

En el problema de las cerillas se han considerado errores por descuido aquellas ocasiones en las que los alumnos han contestado con el número total de cerillas necesarias para configurar los cuatro elementos de la serie.

Podemos concluir que la mayor parte de este tipo de errores se producen cuando una vez que el alumno da por finalizado su proceso de resolución de manera correcta, construye una frase de respuesta que no es la adecuada para la pregunta planteada en el problema sino que responde otra pregunta distinta a la planteada en el problema.

En el caso de la alumna 71 que se muestra en la figura 2.18, optamos por pedirle que nos explicara cómo había llegado a su respuesta. En la hoja original se puede apreciar que ha hecho una serie de cálculos que ha borrado antes de escribir su respuesta. En la imagen se aprecian las notas tomadas durante la entrevista. En un principio la alumna multiplica 37 por 5, se da cuenta de que no tiene sentido y empieza a escribir «5» en columna y llega a la conclusión de que necesita 9 latas pues en sus propias palabras va sumando «de cabeza»; cuando le preguntamos: «entonces 9 latas con 5 litros de pintura en cada lata, ¿cuánta pintura has comprado?», contestó algo así como «ay, no, esto no está bien», y es consciente de ello pues lo indica así en el test que acompaña a la pregunta.

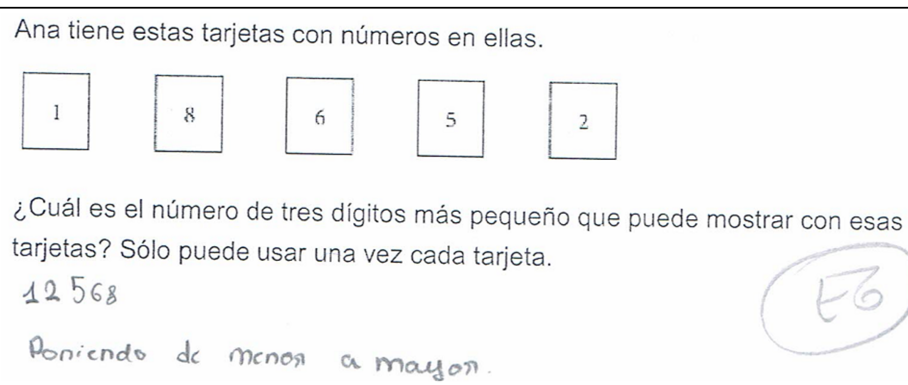
Actividad M041098. Alumno 71


6. La pintura viene en latas de 5 litros. Santi necesita 37 litros de pintura. ¿Cuántas latas debe comprar?

- 5
- 6
- 7
- 8

9 latas necesita

Actividad M041003. Alumno 544


Ana tiene estas tarjetas con números en ellas.

1 8 6 5 2

¿Cuál es el número de tres dígitos más pequeño que puede mostrar con esas tarjetas? Sólo puede usar una vez cada tarjeta.

12568

Poniendo de menor a mayor.

E6

Actividad M051601. Alumno 19

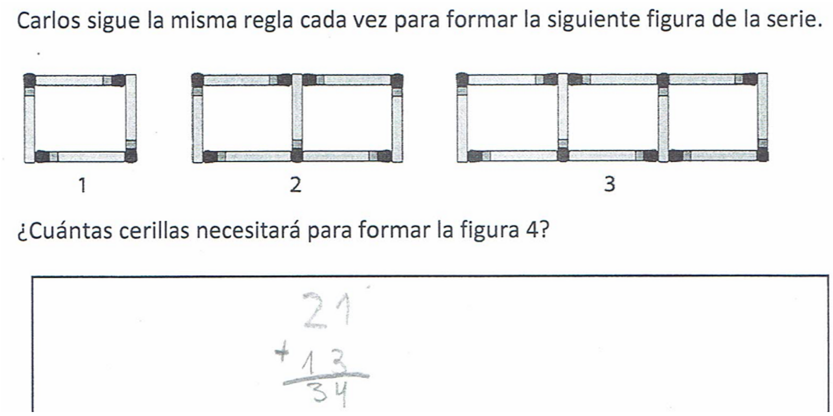


Figura 2.18: Errores por descuido.

6. Relación entre el tipo de error, bloque de contenidos y dominio cognitivo

Analizamos los errores por bloques de contenidos y dominios cognitivos. Para ello construimos la tabla 2.24 y la tabla 2.25 que recogen los porcentajes de error por categorías frente a bloques de contenido y dominios cognitivos tanto para los alumnos de cuarto como para los de quinto.

Tabla 2.24: Tipo de error por bloque de contenidos y dominio cognitivo. Test I (4.º curso).

4º curso	Números	Geometría	Datos	Total
Comprensión	26,7%	19,3%	4,2%	50,3%
Transformación	16,9%	0,2%	4,7%	21,8%
Procedimiendo	24,3%	0,2%	0,6%	25,1%
Codificación	2,4%	0,0%	0,0%	2,4%
Descuido	0,5%	0,0%	0,0%	0,5%
Total	70,8%	19,6%	9,5%	100,0%

4º curso	Conocer	Aplicar	Razonar	Total
Comprensión	25,5%	15,0%	9,8%	50,3%
Transformación	2,4%	2,1%	17,2%	21,8%
Procedimiendo	4,8%	11,3%	8,9%	25,1%
Codificación	1,1%	1,4%	0,0%	2,4%
Descuido	0,2%	0,3%	0,0%	0,5%
Total	34,0%	30,1%	36,0%	100,0%

Fuente: elaboración propia.

Tabla 2.25: Tipo de error por bloque de contenidos y dominio cognitivo. Test II (5.º curso).

5º curso	Números	Geometría	Datos	Total
Comprensión	21,1%	18,3%	6,2%	45,6%
Transformación	18,9%	1,8%	4,4%	25,1%
Procedimiendo	22,8%	3,1%	0,6%	26,5%
Codificación	1,2%	0,6%	0,0%	1,8%
Descuido	1,0%	0,0%	0,1%	1,1%
Total	65,0%	23,8%	11,3%	100,0%

5º curso	Conocer	Aplicar	Razonar	Total
Comprensión	24,7%	7,2%	13,5%	45,4%
Transformación	4,1%	1,6%	19,3%	25,0%
Procedimiendo	6,5%	11,0%	9,0%	26,5%
Codificación	1,2%	0,4%	0,1%	1,7%
Descuido	1,0%	0,0%	0,1%	1,1%
Total	37,5%	20,2%	42,0%	100,0%

Fuente: elaboración propia.

Cuando examinamos el tipo de error por bloque de contenidos observamos que en el caso de los alumnos de 4.º curso el $70{,}8\,\%$ de los errores se producen en el bloque de Números, porcentaje que baja hasta el $54{,}9\,\%$ en los alumnos de 5.º curso. Para estos últimos los errores en este bloque están prácticamente distribuidos de manera equitativa entre las tipologías de Comprensión, Transformación y Procedimiento, siendo ligeramente superior los de Procedimiento. En el caso de los alumnos de 4.º curso los errores de Comprensión predominan ligeramente sobre los de Procedimiento y estos están ocho puntos por encima de los de Transformación. La nota positiva la aportan los casi nueve puntos de descenso en los errores de Comprensión y los casi cinco puntos de descenso en los errores de Procedimiento que se aprecian entre los cursos de cuarto y quinto.

Los errores de codificación y descuido no son significativos en ninguno de los dos cursos.

El bloque de Geometría es el gran olvidado en la Educación Primaria. Las cuestiones de este bloque no se pueden considerar problemas, pues se limitan a evaluar conocimiento de hechos y dos cuestiones de aplicación de poca dificultad. A pesar de ello, el porcentaje de errores en este área es importante y no presenta mejora de cuarto a quinto curso.

En el bloque de datos hay un problema de conocimiento de hechos básicos: la lectura de gráficos. Obsérvese que no se pide en ningún caso la elaboración de los gráficos, sino la lectura e interpretación de gráficos ya elaborados y a partir de la información obtenida saber elaborar unas conclusiones.

Desde el punto de vista de los dominios cognitivos no hay prácticamente variación del curso de 4.º a 5.º y además el mayor porcentaje de errores se obtiene en las cuestiones más relacionadas con la resolución de problemas, aquellas en las que se valora el razonamiento. Dentro de este dominio el porcentaje mayor de errores son del tipo Transformación, especialmente entre los alumnos de 4.º curso. La escasa reducción de la cantidad de errores de Comprensión que se observa entre 4.º y 5.º nos parece un dato preocupante.

Capítulo 3

Análisis del proceso de resolución de problemas en las aulas de tercero de Educación Primaria

1. Introducción

En este capítulo se describe la secuencia de trabajo en las aulas de tercero de Educación Primaria, la conjetura de investigación que ha guiado el trabajo a lo largo de las sesiones, las características de los alumnos con los que hemos trabajado, y todos los aspectos relativos al diseño: desarrollo de las sesiones, recogida de datos y primeros análisis.

El capítulo recoge el resultado de la intervención en las aulas de tercero del curso 2014-2015 para un total de 51 alumnos. A lo largo de los cursos 2014-2015 y 2015-2016 hemos trabajado resolución de problemas en cuatro centros públicos de Educación Primaria. Tres de ellos localizados en Guadalajara capital y alrededores y uno en Alcalá de Henares. En el curso 2014-2015 las intervenciones se centraron en las aulas de tercero (nueve aulas en total), quinto (2 aulas) y sexto de primaria (2 aulas). En el curso 2015-2016 el trabajo se circunscribe a un único centro en el que se trabaja en las aulas de primero a cuarto (7 aulas). En este capítulo y en el siguiente nos centramos en los alumnos para los que hemos podido hacer seguimiento a lo largo de dos cursos académicos consecutivos, 2014-2015 y 2015-2016 (3 aulas).

Este es un trabajo de carácter descriptivo en el que analizamos el modo en que los alumnos abordan a una batería de problemas diversos: sus producciones, su aptitud para la resolución de problemas, los conocimientos formales y no formales que poseen, las diferentes representaciones que emplean, y el modo en que los alumnos hacen uso de todas estas habilidades y cómo el trabajo con problemas va cambiando su actitud ante ellos y va proporcionándoles herramientas para mejorar su competencia en resolución de problemas. Se trata por tanto de una investigación longitudinal panel, en la terminología de Hernández, Fernández y Baptista (2006, p. 220).

La metodología llevada al aula potencia la participación, la discusión tanto en pequeño grupo como en gran grupo de las respuestas. Se busca mejorar la actitud de los alumnos ante la resolución de problemas a través de «hacerles hablar sobre matemáticas», «escribir sus matemáticas», «discusión y búsqueda de diversas estrategias». Todo esto implica que no sean muchos los problemas trabajados en una sesión, ya que se requiere tiempo para dejarles trabajar, hacerles hablar y escucharles.

Estamos interesados en el proceso de empoderamiento del alumno y nuestra conjetura es que gracias a las oportunidades de desarrollo conceptual que les planteamos y las habilidades en la resolución de problemas que les ayudamos a desarrollar conseguiremos mejorar y cambiar su actitud ante la tarea. Las variables a observar serán por tanto la evolución de sus propuestas de solución, observaremos cómo evoluciona su capacidad para exponer y explicar su trabajo y hablar sobre él y la disposición que muestran para trabajar y participar. El resto de los elementos que se den en la clase serán considerados condiciones de contorno.

Los alumnos de esta investigación trabajan las matemáticas bajo dos planteamientos muy diferentes: las sesiones que podríamos denominar «estándar» de acuerdo con la programación de aula (en general se programan de dos a tres páginas del libro de texto por sesión) y siguiendo la metodología propia de cada una de las maestras de Matemáticas. Y por otro lado, la sesión de intervención que responde al diseño de una clase-taller de resolución de problemas guiada por la investigadora y en las que la maestra asume el papel de observador y asistente.

En las tres aulas en las que nos centramos en este capítulo son maestras las que desempeñan este papel, en dos de ellas se trata además de la tutora del grupo.

2. Conjetura de la investigación

Como ya hemos indicado, la resolución de problemas plantea serias dificultades a los alumnos de todas las etapas escolares y estas se manifiestan desde muy temprana edad. La complejidad de la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas no se debe solo al nivel de demanda sobre los conocimientos y competencias del alumno sino también a la formación recibida y las oportunidades ofrecidas para trabajarlos. El desarrollo del currículo se caracteriza por un alto contenido operacional y algorítmico, es un proceso de instrucción centrado en los procedimientos y no en los procesos de comprensión de los conceptos, donde el libro de texto juega un papel principal como guion a seguir. Cuando todo esto es transferido a la resolución de problemas se establece un procedimiento de «datos-operaciones-resultados» que permite al alumno «hacer cuentas».

Frente a esta forma de proceder formulamos la conjetura principal de nuestra investigación:

> *Se puede diseñar, poner en práctica y analizar una secuencia de trabajo en la resolución de problemas que permite desarrollar una actitud positiva de los alumnos hacia las matemáticas y en particular hacia la tarea de resolver problemas y que contribuye al desarrollo de actitudes matemáticas.*

La materialización de esta conjetura requiere de la definición y concreción de una serie de objetivos y conjeturas de carácter secundario que nos ayudarán a ser más operativos. Tendremos por un lado los objetivos que nos fijamos para cada una de las sesiones y, por otro, las conjeturas que elaboramos sobre la forma de proceder de los alumnos. Partimos de unos objetivos y conjeturas iniciales que enumeramos a continuación:

- Objetivos de trabajo y diseño de las sesiones (estos afectan tanto al desarrollo de la sesión como al diseño de las fichas de trabajo).

    - Trabajar con un amplio espectro de problemas. Este objetivo se concreta considerando (dentro de cada una de la fichas de trabajo y para cada una de las sesiones) problemas que se encuadran en el caso concreto de tercero de primaria en el bloque de números, a lo largo de cuarto lo harán en otros bloques de contenidos y que en la medida de lo posible se puedan resolver haciendo uso de estrategias diferentes[1].

  - Favorecer la discusión en grupo de las estrategias y soluciones encontradas. Este objetivo se concreta con la corrección grupal de los problemas y facilitando la exposición de diferentes formas de abordar el problema. Son varias las investigaciones que avalan el papel de las habilidades verbales en el éxito académico: la forma en la que los niños hablan y se explican en la clase de matemáticas es un buen predictor de las habilidades aritméticas a lo largo de la Educación Primaria (Durand et al., 2005) y del rendimiento en la resolución de problemas (Watson et al., 2003; Fuchs et al., 2006). Desde nuestro punto de vista, es igualmente importante el conocimiento que aportan al docente sobre lo que realmente están asimilando los alumnos.
  - Analizar y trabajar a partir de los errores detectados. Este objetivo se concreta analizando con los alumnos las soluciones consideradas erróneas frente al enunciado del problema y las soluciones correctas. Solicitando a los alumnos que propongan problemas para los que la solución errónea sí pueda ser considerada como correcta (siempre que sea posible; en caso contrario haciéndoles ver que la respuesta no está bien construida o no responde a un planteamiento lógico).
  - Mostrar a los alumnos la importancia que para nosotros tienen sus justificaciones, tanto las escritas que acompañan a la respuesta de las fichas de trabajo como las verbales cuando las preguntas son corregidas y trabajadas en grupo.

- Conjetura sobre la actitud de los alumnos.

  - Esperamos una actitud positiva, una buena disposición inicial hacia la tarea. Hemos observado en las intervenciones de la prueba piloto y con los alumnos que han participado en pruebas realizadas en el capítulo 2 que los alumnos responden positivamente a las tareas planteadas siguiendo el esquema antes propuesto.

[1]Utilizamos el término estrategia de resolución en los términos empleados por Bruner (1984), Webb (2014) y Lee (1982). Para el primero «una estrategia hace referencia a un patrón de decisiones en la adquisición, retención y utilización de la información que sirve para lograr ciertos objetivos, es decir, para asegurarse de que se den ciertos resultados y no se produzcan otros». Los segundos designan como «estrategia heurística» el conjunto de conductas observadas en los resolutores.

- Esperamos que una vez se encuentren en dificultades, «soliciten ayuda»: la respuesta al problema. Esta intervención responde a la necesidad de conocer por nuestra parte qué es lo que les lleva a abandonar un problema y por qué al pedir ayuda demandan la solución, no pistas para seguir trabajando de forma autónoma. Esperamos que al avanzar con la intervención vayan haciéndose más constantes, soliciten ayuda para seguir con el proceso, no para que se lo den terminado.
- No esperamos que sean capaces de explicar sus bloqueos y cómo hacen las cosas pero sí que esto vaya mejorando a lo largo de la intervención.

Para evaluar estos aspectos hemos estado buscando un test contrastado de actitud ante la resolución de problemas, pero no hemos dado con ninguno apto para estas edades. Tradujimos y trabajamos con los niños de sexto de primaria el test PSI (Problem Solving Inventory, de Heppner and Petersen, 1982) y a la vista de las preguntas planteadas por estos alumnos concluimos que no es una redacción adecuada para alumnos de tercero y cuarto de Educación Primaria, trabajamos con las ayuda de las maestras del aula una redacción alternativa. Validar este test es una de las líneas de investigación a futuro que derivan de esta investigación. La evolución sobre sus actitudes se analiza a partir de las aportaciones de las maestras y las notas que la investigadora va tomando sobre la rúbrica de evaluación de actitudes que comentamos más adelante.

- Conjeturas sobre las formas de trabajo de los alumnos.
  - Tendencia a mostrar un perfil computacional, predisposición a clasificar el problema como un «problema de» que intentarán acomodar en base a su nivel de comprensión sobre el texto del problema y sus capacidades de transformación[2].
  - Esperamos de los niños con un mejor nivel de comprensión conceptual un razonamiento puramente aritmético. No es de esperar que estos niños se planteen si son posibles otras maneras de abordar el problema ni la necesidad de relatar su trabajo, pues para ellos las operaciones planteadas ya muestran su pensamiento. Los niños con niveles de comprensión y transformación meno-

[2]Las Matemáticas tienen su propio lenguaje, sus sistemas de expresión y representación, que son distintos a los del lenguaje natural (Duval 1999; citado por Barrera, Castro y Cañadas, 2009), y las habilidades para leer, interpretar y responder en ese idioma es lo que estamos denominando capacidad de transformación en este estudio.

res, por su parte, se aventurarán a operar irreflexivamente con los números del problema.

- Tendencia a mostrar un «ímpetu ejecutor»: una vez leído el problema, plantearán la operación. No creemos que haya alumnos que antes de operar nos expliquen su trabajo ni que estimen el resultado[3].
- No es de esperar que comprueben lo adecuado de sus soluciones ni si el resultado tiene sentido dentro del contexto del problema.

Estas conjeturas son consecuencia directa de la formación hasta el momento recibida, los problemas que se trabajan en el aula son «problemas de...», no se trabajan diferentes formas de abordar el problema, se les indica que hay que comprobar la solución, pero en raras ocasiones se comprueba cuando es el maestro el que corrige los problemas[4].

3. Descripción de la muestra de tercero de Educación Primaria.

Hemos trabajado con un total de 51 alumnos de tercero de Educación Primaria a lo largo del curso académico 2014-2015. Se trata de 27 niños y 24 niñas y están distribuidos en tres aulas diferentes.

Son muchas las novedades a las que han tenido que hacer frente estos alumnos, enumerar a continuación las que las maestras del aula consideran más relevantes:

- El cambio de ciclo, el paso de segundo a tercero, supone la transición entre «aprender a leer» y «leer para aprender». En tercero se espera que los alumnos empiecen a hacer uso de las habilidades básicas adquiridas a lo largo de primero y segundo para

[3]Hay alumnos que no son capaces de explicar cómo hacen algunas cosas, pero volver sobre su propio trabajo, revisarlo con los compañeros, les brinda la oportunidad de reflexionar sobre ello (Bruner, 1974). Si bien, como indica este mismo autor, la capacidad para verbalizar la estrategia empleada no es una característica necesaria para el desarrollo de estrategias de resolución. En este estudio se da el caso de niños que resuelven correctamente los problemas, pero construyen un relato muy confuso sobre lo que han hecho.

[4]Llamaremos «solución» o «resultado del problema» a la respuesta concreta a la pregunta planteada en el problema. Nos referiremos al trabajo o conjunto de pasos que conducen del enunciado a la solución como «resolución».

tareas que involucran un nivel mayor de razonamiento, que sean capaces de hacer pronósticos y extraer conclusiones. La cantidad de contenidos y el tratamiento que se les da supone un salto conceptual con respecto a lo que se ha trabajado hasta ahora. En tercero parecen desaparecer los procesos manipulativos, en ninguna de las aulas visitadas hay material manipulativo para trabajar matemáticas.

- El calendario de implantación de la LOMCE (2013). Estos alumnos se han visto involucrados en un proceso de implantación de un nuevo currículo que presenta un adelanto de contenidos con respecto al currículo anterior. Cuando comienza el curso el temario no se ha concretado para algunas materias y esto afectará a la programación inicial establecida. Serán evaluados por estándares y estos han de establecerse y definirse. Al finalizar el curso y de acuerdo con la ley se «comprobará el grado de dominio de las destrezas, capacidades y habilidades en expresión y comprensión oral y escrita, cálculo y resolución de problemas en relación con el grado de adquisición de la competencia en comunicación lingüística y de la competencia matemática» (artículo 20.3 de la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa [LOMCE]) por medio de una prueba de carácter diagnóstico que estará por definir hasta prácticamente el final del segundo cuatrimestre. Este aspecto no preocupa a las maestras más allá del tiempo de duración que se establezca para la misma y la cantidad de contenidos que se pretenda evaluar.

- Por las características propias del centro hay un cambio importante de metodología. A lo largo de primero y segundo estos alumnos han estado trabajando conforme a una metodología híbrida entre el trabajo cooperativo y el trabajo por proyectos. En los dos cursos anteriores en palabras de las maestras de tercero «no se han tratado individualidades», se ha estado centrado en el grupo como un todo. Con el paso a tercero se abandona esta metodología. Hay una disonancia entre las expectativas que las tutoras de tercero tienen sobre el nivel de desempeño de competencias y habilidades de los alumnos y las que realmente muestran, especialmente en los ámbitos de lectoescritura. El primer trimestre es un trimestre destinado a la adaptación a nuevos hábitos de trabajo, nuevas metodologías y nuevas maestras.

- Aula 3A   Número de alumnos: 18   Trazabilidad: 13 alumnos.

  Al frente del grupo está una maestra nueva en el centro cuya especialidad es Pedagogía Terapéutica que hasta este curso ha estado trabajando como PT en un centro de secundaria. Esta es la tercera tutora diferente que tiene este grupo, en el centro está considerado como un «grupo difícil».

Hay dos niños con necesidades educativas especiales: uno de ellos presenta sordera profunda congénita (en el verano de 2015 se le realizará un implante coclear), y cuenta con una maestra especialista en audición y lenguaje. El otro alumno presenta problemas de conducta y dificultades de aprendizaje, precisa de la atención casi constante de una segunda PT. El grupo sabe convivir con ambos y el continuo trasiego de adultos que hay en la sala, no suelen prestar atención a estos dos alumnos en los momentos en los que ellos se muestran más irascibles e incluso violentos. En alguna ocasión hasta llegan a aconsejar a la maestra sobre cómo reaccionar o han advertido en un tono cariñoso a la investigadora sobre su humor. Aceptan y conviven con estos dos alumnos sin que parezca que les influye en su capacidad de concentración. En los momentos de recreo y juego estos dos alumnos están completamente integrados en la clase. En cambio en lo referente a los problemas o situaciones singulares que puedan darse entre el resto de los alumnos parecen no saber parecen no saber gestionar adecuadamente las emociones, no se aprecia cohesión entre ellos (esto evolucionará favorablemente a lo largo de 4.º curso) y sí se detecta un nivel de competitividad importante en un sector de los alumnos. Este curso se ha incorporado una niña al grupo que ha promocionado y no es aceptada de entrada ni por el grupo de niños que juega el rol de alumnos aventajados, entre los que ella quiere tener derecho a ser escuchada, ni por el grupo de niñas en general. Durante los recreos a lo largo de todo 3.º observamos que ella juega con un grupo de niñas ajeno a su clase. El alumno con mejores competencias cognitivas carece de habilidades sociales para relacionarse con el grupo, es autosuficiente y en ocasiones poco paciente con aquellos compañeros que no siguen sus razonamientos cuando los exponen, pero es una alumno muy participativo. Hay tres niños con una falta de confianza en sí mismos importante y otros dos que no parecen saber ni estar muy dispuestos a colaborar con sus compañeros.

Durante las horas de intervención ninguno de los dos alumnos con necesidades educativas especiales estará simultáneamente en el aula.

Desde el punto de vista de la investigadora el grupo se muestra muy participativo, es el menos numeroso y resulta fácil y productivo trabajar con ellos. Si se observan algunas tensiones entre ellos y no aceptan que los equipos de trabajo les sean impuestos pero a cambio de dejarles total libertad para configurar los grupos ellos trabajan muy concentrados y se muestran durante toda la intervención interesados en abordar problemas nuevos.

- Aula 3B   Número de alumnos: 21   Trazabilidad: 20 alumnos.

  Al frente de este grupo está una maestra con más de diez años en el centro, este es su último año en activo pues se jubilará al terminar el curso. Es una persona muy paciente y encargada de las matemáticas de este grupo, es también la tutora del grupo; fue durante años profesora de secundaria de Geografía e Historia y siempre se la observa de buen humor, firme y disciplinada. Es también la encarga de impartir las matemáticas de un grupo de sexto.

  En este grupo hay tres alumnos con un comportamiento claramente disruptivo, y se da además la circunstancia de que hay otros tres alumnos de los etiquetados como «buenos alumnos» que ejercen de «poder en la sombra»: saben cómo influir sobre uno de estos niños para soliviantar a los otros o al profesor con la seguridad de que no serán ellos los que acaben en el despacho de dirección (la maestra llama la atención sobre este comportamiento a la investigadora y esta observará en el patio en alguna ocasión esta forma de proceder). También en este grupo se observa competitividad evidente entre ellos. Hay dos alumnos que ya repitieron curso en segundo de primaria, un niña con TDAH (Transtorno por déficit de atención e hiperactividad), y un niño que ha llegado nuevo al centro bastante desmotivado pues trae una experiencia negativa de su centro anterior.

  La investigadora no percibe en ellos competitividad y se muestran en su mayoría muy cariñosos, en este grupo tan pronto llega la investigadora al aula es informada sobre lo acontecido desde la última sesión, fiestas de cumpleaños, resultado de las competiciones deportivas en las que han participado o las que están programadas, etc. Esta tendencia a «estar informados» también la muestran con respecto a cuanto acontece de extraordinario o singular durante el transcurso de las sesiones, dejan de trabajar para prestar atención a la persona que entra o sale del aula, o está sucediendo en el patio. Es el grupo más homogéneo en cuánto resultados académicos.

- Aula 3C   Número de alumnos: 20   Trazabilidad: 18 alumnos.

  Al frente de este grupo está una maestra cuya especialidad en también la de Pedagogía Terapéutica, con siete años de antigüedad en el centro, muy involucrada en crear hábitos de trabajo en un ambiente tranquilo y relajado. Es un grupo en el que no se perciben tensiones y a lo largo del curso consigue un ambiente de trabajo más relajado y cordial. Se percibe cohesión y sentimiento de pertenencia entre la mayor parte de los integrantes del grupo. Tanto maestra como alumnos participan en una gestión acertada del nivel de ruido en el aula.

En esta clase hay dos alumnos que ya repitieron curso en segundo y otros dos con TDAH, hay también un niño que será diagnosticado con Síndrome de Asperger a lo largo del curso siguiente. Se observa que este último es aceptado por el grupo pero no así uno de los niños con TDAH ni uno de los alumno que repetidores que pasa completamente desapercibido, durante los recreos observamos que este niño en ningún momento juega con los niños de su clase, esta situación se prolongará a lo largo de cuarto.

Este grupo tiene siempre la sesión a última hora de la semana y a pesar de ello su comportamiento es bueno aunque hay varios días en los que se les percibe cansados y no podemos trabajar el mismo número de problemas que en los otros dos grupos. Son participativos. Es un grupo en el que las habilidades lingüísticas parecen estar por encima de las habilidades matemáticas. La actitud de la maestra hacia su grupo es positiva, ella habla con cariño de ellos en todo momento y esto se percibe en el ambiente del aula. Es también la única aula en la que los alumnos no están dispuestos en filas de a uno, están dispuestos en cuatro filas de cinco alumnos con los todos los pupitres juntos ocupando el área central de la sala y dejando espacio libre por donde transitar alrededor.

Ninguna de las tres maestras se muestra conforme con la metodología implantada en el centro en la etapa anterior y esto se traduce en nerviosismo y ansiedad durante las primeras semanas de clase. A medida que avanza el curso y se han adaptado unos a otros este nivel de ansiedad desaparece en las aulas B y C pero solo llega a rebajarse un poco en el aula A.

4. Organización del trabajo en el aula. Primeras observaciones

En este apartado describimos el modo en que se organizan las sesiones, detallamos la temporarización y los objetivos de cada una de las actividades analizadas.

4.1. Sesión inicial

El objetivo de esta primera sesión, que tuvo lugar el 24 de octubre de 2014, es presentar a la investigadora y el programa, explicar la dinámica de las clases y recoger información sobre las ideas de los alumnos con respecto a la resolución de problemas. En los días previos a nuestra llegada las maestras de matemáticas anunciaron en cada una de las clases nuestra «visita».

Diseñamos la sesión con el objetivo de recoger información y de mostrar a los alumnos nuestra actitud de escucha activa. Al concluir la misma les hicimos ver que habíamos estado intentando resolver el problema «¿qué opinión tienen los alumnos de tercero de primaria sobre las matemáticas y la resolución de problemas?» y se analizó con ellos la forma de trabajo.

Hablamos sobre «¿cuál es mi asignatura favorita?, ¿se me da bien resolver problemas?, ¿me gusta resolver problemas?, ¿qué crees que es ser bueno en matemáticas?, y ¿qué hace falta para ser bueno en matemáticas?». Intervinieron todos aquellos alumnos que levantaban la mano pidiendo la palabra y fuimos solicitando la intervención de otros alumnos cuidándonos de que al final de la batería de preguntas todos en algún momento hubieran participado al menos una vez. Entre pregunta y pregunta se hacía recuento de las diferentes respuestas y se registraban en una tabla en la pizarra. Al finalizar la sesión se leyeron las conclusiones que fueron elaboradas entre todos (mostramos aquí el resumen de las tres clases):

- Para el $100\,\%$ de los alumnos resolver un problema de matemáticas consiste en «encontrar la cuenta o el número que te están pidiendo», «los problemas son de sumar, de restar y a veces de multiplicar o de dividir». Y «los problemas de matemáticas casi siempre tienen una solución aunque a veces tienen trampa y están puestos para engañar».
- Para el $68\,\%$ de los alumnos las matemáticas se te dan bien cuando «haces caso a la maestra, y haces los deberes y los ejercicios». El $32\,\%$ restante considera que es una cuestión de «que se te dé bien o mal, porque no todos juegan bien al fútbol o dibujan bien». Y para el $85\,\%$ eres bueno en matemáticas «cuando tienes buena nota»; el resto no lo sabe.
- Hay un $40\,\%$ de alumnos que dicen que no les gusta hacer problemas «porque se me dan muy mal», «no entiendo lo que tengo que hacer».

- Las matemáticas les resultan fáciles al 57 % de los alumnos cuando hay que hacer cuentas o «son cosas que dimos el año pasado».

Se insiste en que los problemas que vamos a trabajar no son un examen, están muy preocupados por este tema.

Pronto se observa que la disposición de los alumnos es muy buena y, en todas las aulas sin excepción, están muy contentos con la sesión. Son ellos los que empiezan a controlar el calendario de sesiones (según nos hacen saber las maestras o ellos mismos en cuanto nos ven llegar al centro).

4.2. Características comunes de las sesiones

En principio se programan dos sesiones al mes, los viernes de semanas alternas. Las sesiones tienen lugar dentro de la franja horaria destinada a matemáticas de cada uno de los grupos: grupo 3A, de 9:45 a 10:30; grupo 3B, de 11:45 a 12:30; grupo 3C, de 13:15 a 14:00. Esta programación estará en todo momento sujeta a las necesidades de agenda de los grupos (seguimiento de la programación establecida, calendario de festividades, actividades culturales, etc.) y obligaciones lectivas de la investigadora[5].

Para cada sesión se preparan tres problemas y se espera que los alumnos los trabajen individualmente. Se corregirán colectivamente. No se dan pautas de organización de la tarea, únicamente se les pide que lean atentamente los tres problemas de la hoja. En las primeras sesiones se escriben en la pizarra o se recuerdan verbalmente las siguientes directrices:

- «Puedo resolver los problemas en el orden que quiera, no necesariamente en el orden establecido en la hoja de trabajo». «Puedo empezar por aquel que me guste más, o el que me parezca más fácil, como yo quiera».
- «Intento no borrar lo que he hecho, lo necesito para saber cómo he pensado».
- «Intento explicar lo que voy a hacer y por qué lo hago».
- «Si un problema no lo entiendo, no me preocupo. Pienso cómo explicar qué es lo que no entiendo para pedir ayuda».

[5]No hubo sesiones desde enero hasta mediados de marzo. La investigadora participaba como docente en el Programa de Pasantías Matemáticas del Gobierno de Chile.

- «Puedo dejar problemas sin contestar, intentaré explicar a la profesora por qué no he contestado».

Las sesiones son de 40 minutos efectivos, aproximadamente, y salvo contadas excepciones no ha sido posible trabajar y corregir los tres problemas en una única sesión. Hemos sido flexibles con este tema pues consideramos que lo primordial es escuchar al alumno, trabajar para que el mayor número de ellos comprenda el problema, facilitarles dos formas o herramientas diferentes para solucionar un mismo problema y demostrar mediante la práctica la importancia de cuestionar, discutir la solución y analizar los errores.

Hasta ahora no son ellos los que salen a la pizarra a corregir los problemas; con la pauta establecida de clases de 45 minutos y lo extenso de los contenidos que hay que trabajar, la maestra corrige ella misma los problemas y revisa los cuadernos de los alumnos a lo largo del fin de semana para comprobar que han realizado correctamente su trabajo.

Los problemas que quedan pendientes se dejan para que las maestras los trabajen cuando lo estimen oportuno (nos consta que salvo contadas excepciones esto no llega a hacerse). Este es uno de los puntos importantes a tener en cuenta en la planificación de futuras acciones de investigación. Somos conscientes de que pedir a los alumnos que trabajen en un problema que luego no se puede corregir no cumple con los objetivos de la intervención.

No en todas las sesiones nos ha sido posible registrar los audios, no contábamos con los permisos, y en muy pocas ocasiones hemos podido tomar fotografías. Sí contamos para el análisis con el trabajo de los alumnos y las notas del cuaderno de campo, los registros de las rúbricas sobre actitud que las maestras van completando quincenalmente junto con la investigadora al término de las sesiones y considerando también lo acontecido entre sesión y sesión.

Al comienzo de la intervención los alumnos están dispuestos en filas de a uno en todas las aulas. Las tres tutoras plantean que es la forma que han encontrado más efectiva para trabajar la atención, la concentración, y mantener un nivel de ruido razonable en el aula. Una vez superado el primer trimestre ya podemos disponer a los alumnos como consideremos más conveniente en cada sesión. Empezaremos a trabajar en parejas o en grupos de tres/cuatro alumnos algunas actividades concretas. Las hojas de problemas analizadas en este capítulo se han trabajado todas individualmente y después se han corregido a nivel de grupo-clase con total libertad por parte de los alumnos para intervenir.

4.3. Descripción de las actividades y fichas trabajadas en tercer curso

Con los alumnos de tercero hemos trabajado a lo largo de siete sesiones de clase: en cuatro de ellas con las fichas de problemas que se analizan detalladamente en este capítulo y en las otras, problemas con material manipulativo como el tangram, actividades de cálculo mental con secuencias de problemas orales para ser planteados por la maestra, actividades con dados y material impreso preparado para ello y juegos variados, que describimos someramente al final del capítulo. Para cada una de las sesiones de problemas trabajadas en la sesión se han preparado materiales adicionales o similares para las maestras, ellas podían utilizarlos en sus clases o bien proponerlos como tareas adicionales. No tenemos información sobre ellos.

Todas las sesiones han tenido una duración efectiva en torno a los treinta y cinco o cuarenta minutos. En los horarios figuran periodos de 45 minutos, pero hay que considerar el tiempo de cierre y apertura de la sesión (recogida de material al tiempo que vamos haciendo un resumen de lo trabajado en el día y el cambio de aula; al inicio de la sesión hay que entregar el material, explicar la sesión y escuchar a los alumnos el relato de las las novedades del día o lo que ha acontecido entre sesión y sesión).

5. Análisis de datos

Estudiamos y tratamos de dar evidencia del desarrollo de actitudes valiosas en la resolución de problemas. De acuerdo con la metodología utilizada serán necesarios dos tipos de análisis sobre el trabajo realizado:

- Uno centrado en el problema. Se considera toda la muestra de alumnos que han trabajado en un mismo problema y estudiamos las diferentes formas de abordarlos, los modos de representación más significativos, los niveles de argumentación, los procesos y el lenguaje matemático empleado y los errores más frecuentes (desarrollamos estos aspectos en el siguiente apartado).

- Un segundo análisis centrado en la progresión de los alumnos en el que estudiaremos la evolución de su trabajo, su discurso y las notas tomadas en el diario de clase relativas a la rúbrica de actitudes diseñada para sistematizar este tipo de observaciones.

5.1. Tipos de datos recogidos

En este tipo de investigaciones la recogida de datos juega un papel fundamental. Como ya se ha comentado, no hemos tenido oportunidad de grabar en vídeo ninguna de las sesiones y en un número contado de intervenciones se ha podido grabar el audio y se han tomado algunas fotografías del aula y las pizarras.

La investigadora ha sido la única persona responsable de la recogida de datos; mediante pequeñas indicaciones en la hoja del alumno se hace referencia a notas o incidencias particulares. Se ha intentado transcribir la conversación o las anotaciones en el cuaderno de registro en tiempo real, pero ha sido materialmente imposible en muchos casos pues la demanda por parte de los alumnos no lo ha permitido.

La fuente principal de datos son las hojas de trabajo de los alumnos y las conversaciones con ellos durante las tareas de corrección en gran grupo o mientras que ellos están trabajando en un problema en concreto, las notas del diario de clases y las anotaciones de las maestras. El diario de campo se convierte en un instrumento significativo en esta investigación, en él hemos recogido el discurrir cotidiano, las conversaciones informales, los comportamientos e interacciones que han tenido lugar no solo en el aula, durante los recreos, encuentros en la sala de profesores, en las entradas y salidas del centro, etc. y se describen las pautas de comunicación no verbal. Las observaciones realizadas en esta intervención están recogidas en tres cuadernos de campo que para su localización en el análisis e interpretación se referencian como sigue:

- Las observaciones tomadas en el grupo A a lo largo del curso de 3.º están localizadas en el cuaderno 1, páginas 1 a 15. Las notas tomadas en este grupo a lo largo del curso de 4.º curso se recogen en el mismo cuaderno a partir de las página 16 a la 35.
- Las observaciones del grupo B en el curso de 3.º están registradas en el cuaderno 2, páginas 1 a 15. Las observaciones sobre este mismo grupo a lo largo de 4.º curso están en este mismo cuaderno en las páginas 16 a 35.
- Las observaciones del aula C a lo largo de 3.º curso se encuentran en el cuaderno 3, páginas 1 a 15; las notas registradas en 4.º curso figuran en las páginas 16 a 35.

Este aspecto ha de ser revisado para futuras intervenciones pues hay una serie de limitaciones que hacen que la recogida de datos no sea todo lo eficaz que debiera:

- Las entrevistas tienen lugar o bien mientras el alumno va resolviendo el problema si la investigadora se acerca a su sitio y le pide que le explique cómo lo está haciendo, o bien cuando el alumno ha terminado su trabajo. En ambos casos se va recogiendo el informe verbal sobre lo que en ese momento está haciendo o pensando el alumno o bien sobre lo que ya ha hecho. Como el problema lo están trabajando todos los alumnos simultáneamente es frecuente que mientras la investigadora está con un alumno sea requerida por otros solicitando ayuda.

- Si los alumnos tienen que esperar a ser atendidos, suelen ponerse a comentar el problema con el compañero por lo que se pierde la oportunidad de recoger lo que en primera instancia ha pensado el alumno.

- El número de entrevistas que se puede abordar es muy limitado.

- Los alumnos se ponen «en guardia» o «un poco nerviosos» si después de ser preguntados la investigadora toma nota en su cuaderno o hace alguna marca en las hojas del alumno. Estas notas están destinadas a ser indicadores o llamadas de atención para la investigadora, las anotaciones que toma en el diario de clase son anotaciones sobre lo que está observando tanto para rellenar la rúbrica de actitudes como para registrar lo que acaba de observar.

Con los datos se busca:

- Construir un esquema global a partir del análisis de lo que acontece problema a problema. Esta información nos aporta una visión de conjunto de la tarea trabajada en cada sesión para tomar acciones a desarrollar en sesiones sucesivas. Los datos son transferidos a hojas de cálculo para su análisis cuantitativo. La interpretación de estos datos se basa en las hojas de trabajo de los alumnos, en las entrevistas y en las aportaciones de sus maestras.

- Construir esquemas individuales para cada problema y para cada alumno con la información de las hojas de problemas y el apoyo de las notas de clase.

- Construir un esquema global con la información de los esquemas individuales. En este proceso surgen aspectos que no tienen por qué haber sido identificados en el análisis individual.

- Elaborar una red sistémica para organizar la información.

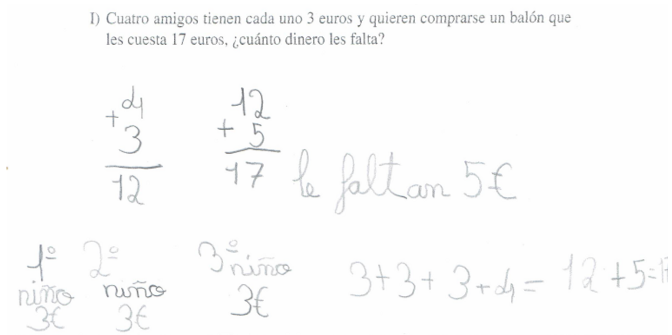
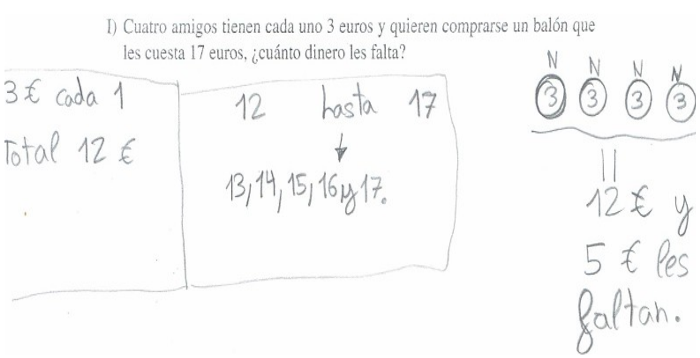
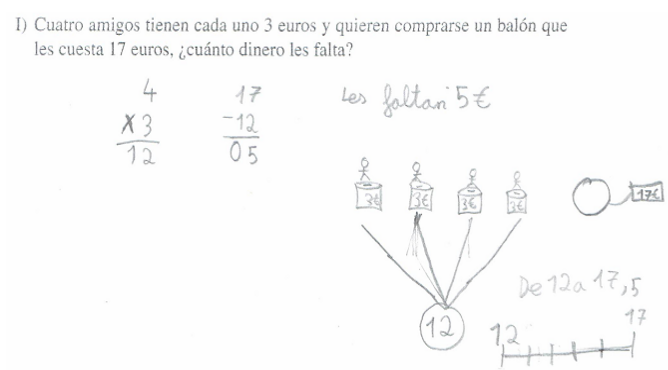
El análisis de los datos obtenidos de la evaluación de las hojas de problemas es de carácter inductivo-deductivo: partimos de unas categorías existentes que modificamos o ampliamos en función de los datos de nuestra investigación. Para cada uno de los problemas, y para cada uno de los alumnos, analizamos una serie de aspectos e indicadores (en la tabla 3.1 se muestran algunos ejemplos). Las variables analizadas son cada uno de estos aspectos y los indicadores que se establecen para cada una de ellas son los valores que la variable puede tomar.

A continuación listamos y explicamos cada una de las variables que vamos a observar:

- El tipo de representaciones empleadas[6]:
  - Icónica (imágenes o esquemas para representar el entorno, tienen un carácter figurativo, relativamente independientes de la acción). Desde el punto de vista de las matemáticas, estas imágenes cumplen dos funciones: ayudan a modelizar el problema y son el soporte de las acciones matemáticas necesarias para resolverlo. En ocasiones los dibujos que utilizan los niños son más ornamentales que funcionales: en estos casos no cumplen con ningún tipo de funcionalidad matemática. Cuando se ha dado esta situación hemos categorizado los dibujos como «icónico-artístistico». Nos encontraremos con niños que hacen un dibujo sencillamente porque les indicamos que quizás un dibujo podría ser una buena ayuda, pero que no lo utilizan como soporte para la resolución.
  - Simbólica (símbolos o códigos que tienen un carácter figurativo y en su forma no guardan relación con el objeto o acción representada). En este apartado hemos considerado tres subcategorias: verbal, numérica y «símbolico-gráfica» (flechas, cruces, diagramas, la recta numérica, etc.).
  - Icónico-Símbólica. En esta categoría hemos agrupado construcciones como la recta numérica, líneas del tiempo y modelos de barras, pues entendemos que responden a un nivel de abstracción mayor que los trabajados en los dos apartados anteriores y que permiten además establecer no solo el recuento y organización de los protagonistas y datos del problema sino también las relaciones matemáticas que hay entre ellos. Esta categoría nos ha surgido como respuesta a las producciones de los alumnos.

[6] Se considera que una representación es un signo o sistema de signos, caracteres u objetos que pueden ponerse en lugar de algo distinto de él mismo. Es la imagen mental que el alumno se hace del problema, de los objetos y las relaciones entre ellos que se describen. En este apartado analizamos las manifestaciones externas de cómo el alumno está interpretando el problema.

Tabla 3.1: Ejemplos de modelos de representación, lenguaje y argumentación.

	Representación	**Lenguaje matemático**	**Lenguaje verbal escrito**	**Argumentación**
	Simbólico-numérica	Suma	· No usa · Elabora una frase-respuesta	Implícita numérica
	Icónica	Conteo	· No usa · Elabora una frase-respuesta	Implícita numérica
	Icónico-simbólica	Multiplicaciones Restas Conteo	· No usa · Elabora una frase-respuesta	Representación algebraica implícita Representación gráfica explícita

Los sistemas de representación son constructos convencionales. La decisión de dónde empieza y termina un sistema o el tipo de representación que se le atribuye tiene un componente arbitrario y viene dada por la conveniencia y simplicidad de la descripción. Por lo tanto, al calificar el tipo de representación puede darse una ambigüedad. En la práctica la ambigüedad se resuelve teniendo en cuenta el contexto y la forma de proceder que hemos observado en el alumno. Que en el trabajo de un alumno observemos un dibujo y una operación aritmética seguido de la redacción más o menos exhaustiva no significa que este alumno para representarse el problema haya hecho uso de la representación icónica, simbólico numérica o simbólico verbal.

- El lenguaje matemático utilizado: suma, resta, multiplicación, división, proporcionalidad, cálculo mental, conteo, reparto, etc.
- El lenguaje verbal escrito: identificamos aquellas ocasiones en las que los alumnos se valen del lenguaje verbal escrito para usos descriptivos (caramelos, libros, euros, etc.) o usos narrativos (describir con detalle su procedimiento o razonar la respuesta, indicar si una parte de su trabajo está mal, si ha borrado o tachado). En la definición de los valores que puede tomar esta variable también hemos considerado si el alumno elabora o no una frase como respuesta al problema (el error codificado como E5 que analizábamos en el capítulo anterior). En caso afirmativo nos encontramos con que la frase es la respuesta a la cuestión planteada o por el contrario se está respondiendo a una pregunta diferente a la planteada o solo a una parte del problema.
- Organización del trabajo y del espacio dentro en la hoja o ficha (en adelante «organización del trabajo y de la hoja de trabajo»): se observa si el alumno organiza el trabajo en datos-operaciones-resultados, subraya la pregunta, identifica datos en el enunciado, etc. En los casos en los que toma nota de los datos estos pueden estar contextualizados (utiliza lenguaje verbal para identificar el tipo de dato o acción), no contextualizados (lista de números sin identificar la naturaleza del objeto o acción a la que hacen referencia estos números), toma nota de frases inconexas del enunciado, etc.
- Argumentos:
    - Explícitos: expresan de forma clara y determinante lo que están denotando, pueden hacer uso del lenguaje verbal descriptivo, del lenguaje narrativo o del lenguaje pictórico.

- Implícitos: no acompaña su trabajo ni sus argumentaciones de lenguaje verbal o pictórico que permita identificar el proceso de resolución. En el trabajo del alumno aparecen tan solo las operaciones realizadas y sin «unidades» (argumentación implícita-aritmética) o las representaciones icónicas con o sin soporte simbólico como pueden ser el lenguaje verbal, matemático o símbolos (argumentaciones implícitas verbales o pictóricas). Se requiere un acto deliberado de interpretación del trabajo del alumno para seguir su relato.

- Los errores detectados se codifican de acuerdo con los descriptores ya empleados en el Capítulo 2 y que resumimos aquí:

  - Errores de comprensión lectora (código E1): son los errores asociados al desconocimiento del significado de las palabras y símbolos que aparecen en el enunciado. Son muy pocos los alumnos que incurren en este error pues todos los problemas se leen en voz alta una vez que se han repartido las hojas de trabajo y nos aseguramos de que los alumnos entienden todas las palabras y símbolos que forman parte del enunciado. Hemos clasificado como errores de este tipo los casos en los que se observa que el alumno no ha interpretado bien los términos del problema o el sentido de la frase, o que ha omitido una parte de esta.
  - Errores de comprensión (códigos E2.1 y E2.2): el alumno se encuentra con dificultades para entender la «historia» planteada en el problema. Si no es capaz de identificar qué le está contando el problema en términos generales el error es clasificado como E2.1 en tanto que si lo que se detectan son problemas de comprensión de conceptos o términos concretos, lo clasificamos como E2.2 (doble, mitad, concepto de fracción, etc.).
  - Errores de transformación (código E3): el alumno no identifica el proceso matemático necesario para resolver el problema. El alumno se encuentra con dificultades para modelizar matemáticamente el problema.
  - Errores de procedimiento (en esta categoría hemos diferenciado cinco subcategorías diferentes codificadas desde E4.1 a E4.5):

    E4.1 El alumno opera aleatoriamente, elige al azar la operación o las operaciones con las que pretende encontrar la solución; en general toma los números que aparecen en el enunciado y en base a cómo ha clasificado el problema («problema de sumar», «problema de multiplicar», etc.) opera con ellos.

E4.2 El alumno elige la operación correcta, pero no le otorga el significado adecuado al contexto del problema, este tipo de error es muy común en los problemas en los que aparece una división, o en los problemas con fracciones, y está inducido en algunas ocasiones por el lenguaje del enunciado y la búsqueda de palabras claves.

E4.3 Hay errores en el algoritmo o el cálculo.

E4.4 Error por omisión, el problema no se concluye, faltan operaciones o etapas a las que responder.

E4.5 No conseguimos explicar lo que el alumno hace y por qué lo hace y él tampoco nos lo ha podido aclarar cuando le hemos preguntado.

- Errores de codificación (código E5): el alumno ejecuta las operaciones pero no elabora una frase de respuesta al problema. En los problemas de dos preguntas, responde sólo a una de ellas.
- Error por descuido (código E6): la falta de concentración o las prisas por terminar la tarea les llevan a cometer errores que es poco probable que se repitan de forma sistemática.
- Problema en blanco (código E7): no hay respuesta.

Hemos cuidado la redacción de los enunciados para que sea lo más breve y clara posible y entendemos que están redactados en correcto castellano accesible a un alumno de tercero de Educación Primaria. En cualquier caso, con la intención de minimizar o eliminar los errores debidos al desconocimiento del lenguaje o de los símbolos empleados en el enunciado, los problemas son leídos en voz alta por la investigadora una vez que cada uno de los alumnos tiene su hoja de problemas.

Para evaluar las actitudes y predisposición hacia la resolución de problemas hemos elaborado la siguiente rúbrica que en la medida en la que van sucediendo los acontecimientos en el aula van cumplimentando la investigadora y la maestra del grupo. La rúbrica de observación está diseñada para ser válida tanto en las tareas individuales como colectivas. Todos los ítems se califican en términos cumple/no cumple. No en todas las sesiones podemos tomar nota detallada de todos los alumnos y sobre todos los ítems, pero entre sesión y sesión y en base a lo que va aconteciendo diariamente las maestras del grupo nos van ayudando a cumplimentar la rúbrica.

- Flexibilidad.
    - Se interesa por las otras formas de resolver el problema que proponen sus compañeros.
    - Cambia de opinión cuando se le aportan argumentos convincentes.
- Confianza en sus propias capacidades.
    - Está convencido de que su solución es la correcta y de que resuelve bien este tipo de tareas.
    - Muestra confianza en sus argumentaciones y las defiende aunque se le expongan de forma convincente otros argumentos diferentes a los suyos.
- Espíritu crítico.
    - Se da cuenta de que no llega a una solución o de que la que ha obtenido no es correcta y se preocupa de saber por qué.
    - Analiza la solución obtenida.
- Perseverancia.
    - Baja cuando abandona la tarea si no la resuelve o se siente frustrado tras intentarlo sin éxito.
    - No quiere que se le retire la hoja de trabajo si considera que puede terminarlo o completarlo mejor.
- Autonomía.
    - Escasa cuando pregunta constantemente al profesor qué tiene que hacer o espera a ver la solución de los compañeros. Tras una primera lectura o aproximación infructuosa al problema no intenta trabajar algo por su cuenta.
    - Trabaja de modo autónomo y sólo en caso de duda o cuando encuentra dificultades recurre al profesor o a los compañeros.
- Actitud reflexiva: trabaja de forma reflexiva, razonando su procedimiento de resolución; su objetivo no es terminar cuanto antes.
- Durante las clases está centrado e interesado en el trabajo.
- Disfruta con el trabajo que está haciendo.

- Es participativo, quiere salir a la pizarra, quiere dar su opinión, está dispuesto a contestar, etc.

Las tutoras de grupo han estado presentes en todo momento y han estado participando activamente en el apoyo a los niños, ayudando a que estuvieran centrados en su trabajo y a mantener el orden en el aula. En muy contadas ocasiones y con alumnos muy concretos han sido necesarias llamadas de atención. La disposición y entrega por parte de los alumnos ha sido muy positiva. En todos los grupos los alumnos son disciplinados y respetuosos con el turno del compañero, para intervenir levantan la mano y se les ha dado la palabra a aquellos que la pedían siempre que ha sido compatible con el objetivo de que participara el mayor número de alumnos; nos hemos cuidado de que todos los alumnos en algún momento hayan expuesto su trabajo y hayan participado en las discusiones. Ante la duda por parte de la investigadora, y en particular durante las primeras sesiones, ha sido la maestra del grupo la que seleccionaba los alumnos para salir a la pizarra o contestar a preguntas concretas. Tanto la investigadora como la maestra se han vinculado con el grupo, traspasando la primera el rol de observador.

El diseño final de cada una de las sesiones responde a las observaciones y el análisis de lo trabajado en las sesiones que les precedían. La intervención no siempre se ha centrado en la resolución de problemas pues ha habido demandas puntuales por parte de las maestras para abordar tareas de cálculo mental, trabajar algunos conceptos geométricos como simetrías, descripción de figuras, clasificación de figuras y cuerpos geométricos y actividades de lógica. En este trabajo recogemos solo los resultados de las hojas de problemas y describimos brevemente el contenido y dinámica de las otras.

Hemos hecho seguimiento individual considerando el marco global en el que este debía desarrollarse. Las actividades han estado pensadas para el conjunto del grupo pero durante el desarrollo de las mismas cada uno de los alumnos ha recibido apoyo e indicaciones en función del análisis concreto de su trabajo en las sesiones previas. Cada alumno ha tenido su ficha de trabajo incluso cuando la actividad se desarrollaba en grupo o en parejas pues se les ha pedido que registraran el trabajo a nivel individual.

En las actividades desarrolladas en el aula nos hemos centrado en la comprensión del enunciado, en identificar los problemas de interpretación y de conocimiento del lenguaje, y en mostrar pautas de trabajo adecuadas. Los alumnos no han recibido instrucción previa sobre cómo proceder, ni les hemos presentado heurísticas de resolución de problemas; estas han aparecido de manera natural al corregir las tareas. En la corrección en grupo se han buscado distintas maneras de afrontar el problema, hemos hecho especial hincapié en los planteamientos gráficos, hemos mostrado interés por la expresión y resolución verbal y hemos estado más centrados en que el alumno hablara que en la forma en la que escribía.

Adelantamos ya que el punto más débil de esta intervención ha sido el tiempo. No ha sido posible corregir todos los ejercicios trabajados con los alumnos.

6. Análisis de la ficha 1

Los tres problemas de esta ficha trabajan el ámbito de números naturales[7]. El primer y segundo problema son problemas de dos etapas, el primero es un problema multiplicativo y el segundo trabaja con el concepto de doble y mitad. El tercero es un reparto no equitativo. Ninguno de ellos responde al modelo de problema rutinario o estándar ni a los problemas planteados en los libros de texto.

Creemos haber dispuesto los problemas en orden de dificultad creciente; en función de los obstáculos que encontremos podremos determinar si ha sido así o no.

El objetivo de esta sesión es analizar las destrezas propias de cada alumno al organizarse temporal y espacialmente (la consigna que recibirán por parte de la investigadora se enunciará en términos similares a estos: «podéis resolverlos como queráis y en el orden que queráis, pero no olvidéis, por favor, explicar lo que estáis haciendo»), identificar su habilidad resolutora y su actitud.

Durante la primera mitad de la sesión los alumnos resolverán los problemas de forma individual, sus dudas también serán atendidas individualmente y a medida que vayan apareciendo. Al término de esta primera parte, recogeremos las hojas de trabajo y en la segunda mitad de la sesión corregiremos los problemas en grupo. Los alumnos que saldrán a la pizarra serán escogidos entre los voluntarios que así lo pidan, o los que seleccione la maestra o bien la investigadora (esta última lo hará en función de lo observado mientras los alumnos trabajan). Con la discusión de los problemas se fijará la dinámica de trabajo y se revisarán las heurísticas y conceptos importantes a trabajar en cada sesión.

[7] Aunque en el primer problema aparece implícitamente la cantidad «mitad de un euro», solo cuatro de los alumnos trabajan con el precio unitario de 0,50 euros, el resto razona y opera en el entorno de los números naturales.

El tiempo para cada problema se ha consultado con las maestras al inicio de la sesión y estas proponen de diez a doce minutos por problema.

La investigadora entrevistará a uno o dos alumnos mientras estos resuelven los problemas, para recoger sus expresiones, acciones, etc.

Para asegurarnos de que el vocabulario empleado en la ficha es el correcto leemos todos los problemas en voz alta y se les pregunta a los alumnos si hay alguna palabra que no comprendan o no conozcan de los enunciados; ninguno de ellos dice desconocer los términos del enunciado. También les preguntamos si han entendido el problema y todos ellos dicen comprenderlo aunque en el momento en el que se ponen a trabajar comprobaremos que esto no es así.

Las sesiones no transcurren todas por igual: lo acontecido y observado en la primera y segunda hora nos permitirá redefinir el plan de acción para la tercera y última clase de la jornada, la del grupo C.

Describimos a continuación las características particulares de cada problema y lo observado tanto durante la sesión de trabajo como en el análisis posterior.

6.1. Ficha 1 - Problema 1

Enunciado del problema:

Jaime ha pagado 4 euros por 8 cuadernos. ¿Cuánto pagará por 12 cuadernos?

Se trata de un problema multiplicativo de dos etapas con un nexo de unión y que responde al esquema de la figura 3.1.

Este problema lo han trabajado 49 alumnos: diez de ellos lo han dejado en blanco ($20{,}4\,\%$), dieciséis lo han resuelto correctamente ($32{,}7\,\%$)y veintitrés han incurrido en errores de diversa naturaleza ($46{,}9\,\%$). Estos errores no son disjuntos y solo a partir de la conversación con el alumno podemos discernir la causa primera del error. Por ejemplo, los casos en los que el alumno escoge al azar la operación aritmética pueden ser debidos a problemas de comprensión del enunciado o a problemas de transferencia y esto se traduce en una operación, o en varias, si el alumno alcanza a intuir que en el problema hay más de una operación involucrada, que no son apropiadas.

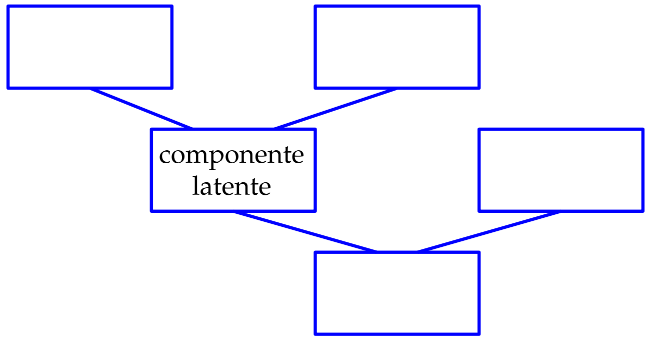


Figura 3.1: Esquema jerárquico de relación entre las componentes del problema (según la notación de Nesher y Hershkovitz, 1994).

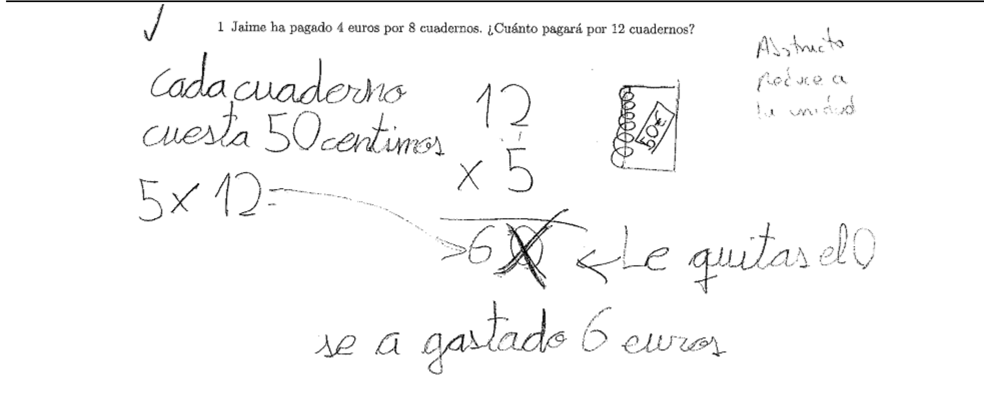
Analizamos las estrategias observadas, las representaciones utilizadas, el modo de argumentación empleado, la organización del trabajo y los errores más significativos.

Estrategias observadas

Entre los 16 alumnos que han resuelto correctamente el problema hemos encontrado cuatro estrategias exitosas diferentes:

- Reducción a la unidad a partir del cálculo del precio de un cuaderno (cuatro alumnos). Ninguno de ellos escribe una división para encontrar el precio de un cuaderno, sino que a partir del precio de 2 cuadernos (1 euro), determinan el de la unidad. En la figura 3.2 podemos ver dos formas distintas de resolver el problema siguiendo esta estrategia.
- Reducción a la unidad considerando como unidad una pareja de cuadernos (tres alumnos). Estos alumnos resuelven el problema por conteo a partir de su propia representación gráfica (figura 3.3). Entre los alumnos que no han resuelto bien el problema hay un alumno que ha intentado utilizar esta estrategia, que opta por una solución narrativa y se equivoca en alguna de las secuencias.

Alumno 3A-2



Alumno 3C-11

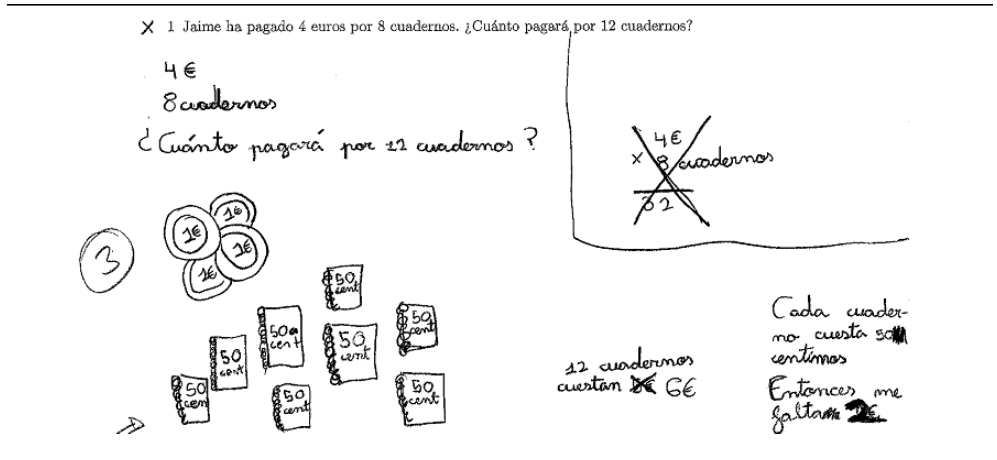
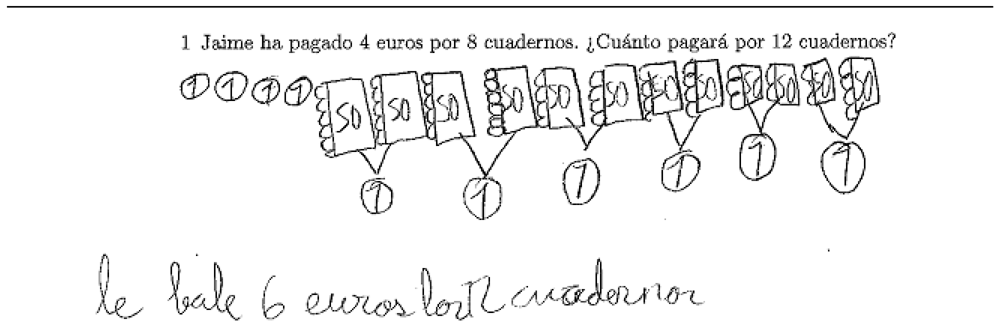


Figura 3.2: Ficha 1. Problema 1. Estrategia de resolución calculando el precio unitario.

Alumno 3A-11



Alumno 3C-5

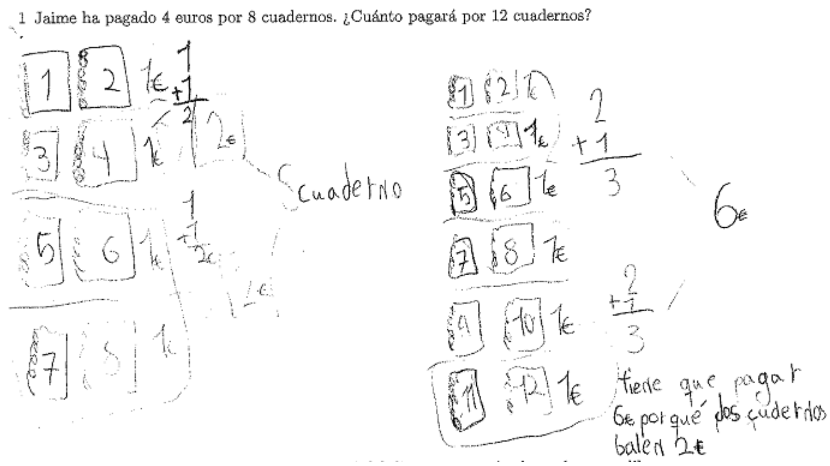
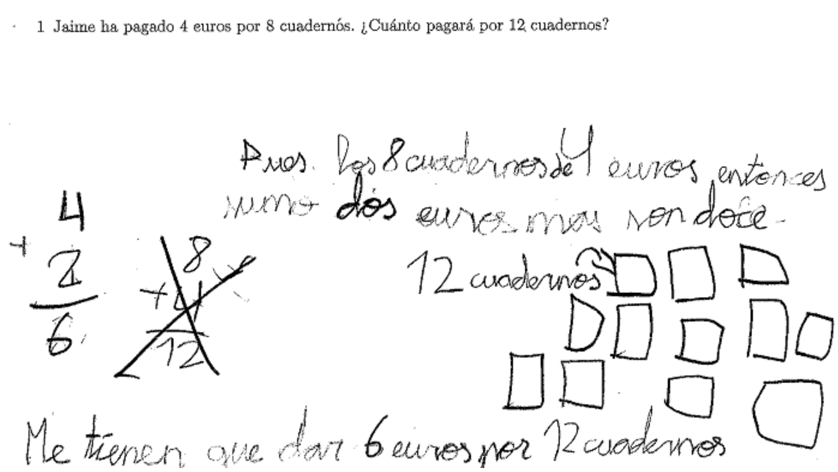


Figura 3.3: Ficha 1. Problema 1. Resolución a partir del precio de un par de cuadernos.

- Hechos numéricos conocidos (tres alumnos): «con 2 euros compro 4 cuadernos y, como $12 = 8 + 4$, necesito 4+2 euros para comprar los 12 cuadernos». Figura 3.4. Para estos alumnos el problema queda reducido a una sola etapa.

Alumno 3C-10



Alumno 3B-13

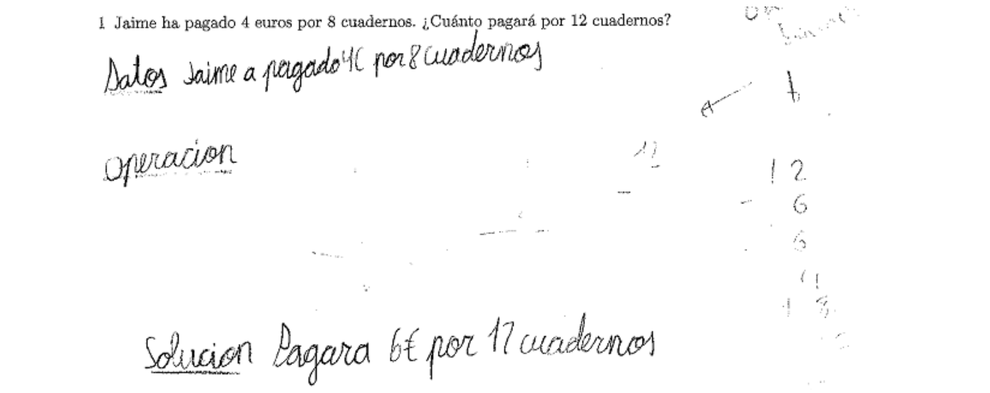


Figura 3.4: Ficha 1. Problema 1. Estrategia de resolución: hechos numéricos conocidos.

- Proporcionalidad (seis alumnos): 4 es la mitad de 8, 6 es la mitad de 12. Necesito 6 euros. El problema queda reducido también a una sola etapa. Figura 3.5.

Alumno 3B-12

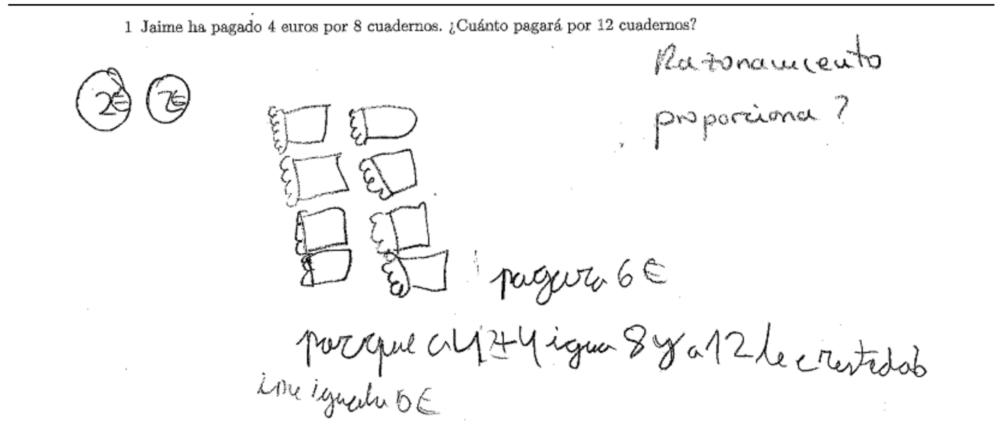


Figura 3.5: Ficha 1. Problema 1. Estrategia de resolución: proporcionalidad.

No somos capaces de diferenciar ninguna estrategia concreta entre los alumnos que no llegan a resolver el problema.

Representaciones utilizadas

En este apartado analizamos las representaciones que el alumno ha utilizado para abordar el problema, no para explicar la solución obtenida o su proceso de resolución una vez que ha concluido el problema (por ejemplo observamos que hay alumnos que una vez han terminado el problema hacen un dibujo figurativo de una hucha y ocho cuadernos pero que este dibujo no es la representación inicial que el alumno se ha hecho del problema y de la que se ha valido para su resolución). Esta variable toma dos valores principales: icónica y simbólica, y dentro de estos hemos observado diferentes subcategorías como icónico-figurativa o artística, símbolico-numérica, símbolico-verbal, etc.

- Icónicas: hay siete alumnos que introducen en sus soluciones un dibujo como función ilustrativa sin soporte al problema (representación icónico-artística). El dibujo parece representar para ellos el «enunciado» pero no el problema: los datos y la relación entre estos. Otros siete alumnos más hacen uso de un dibujo del que se valen para resolver el problema. En algunos de estos dibujos se aprecia soporte numérico, o texto o símbolos como el del euro como parte del dibujo. Seis de estos siete alumnos alcanzan a resolver correctamente el problema, el alumno restante no sabe transformar lo que ha representado/dibujado en un razonamiento matemático que le permita dar la solución al problema.

- Simbólicas: en este grupo hemos contabilizado los alumnos que no hacen uso de ningún tipo de ilustración en su resolución. Solo aparecen reflejados los números y las operaciones. En algunos casos hay lenguaje verbal de soporte y en otros símbolos o tan solo los números sin identificar su naturaleza. Del total de 26 alumnos que hemos contabilizado en esta categoría, diez de ellos llegan a resolver correctamente el problema.

Modos de argumentación empleados

Ocho alumnos construyen un relato que permite seguir su línea de pensamiento, si bien se limitan a escribir la secuencia de operaciones que han utilizado: siete de ellos de forma verbal y uno pictórica con soporte de símbolos y palabras. La falta de modelo y hábito hace que no entiendan bien qué esperamos de ellos cuando les decimos «explica cómo lo has pensado».

Hay 23 alumnos que responden al patrón de argumentaciones implícitas; de ellos, dieciocho escriben solo las operaciones, tres se valen de un dibujo y dos acompañan el dibujo con lenguaje verbal descriptivo.

No observamos a ningún alumno intentando explicar antes de pasar a resolver. Sus explicaciones son posteriores a la resolución y se deben a nuestra insistencia en pedirles que nos mostraran cómo lo habían hecho. Esto se debe a la falta de modelo por parte de los maestros, estamos pidiendo a los alumnos un nivel de desarrollo en cuanto a funciones ejecutivas en el que ellos no se encuentran y para el que no se les ha ofrecido un modelo previo. No han tenido la oportunidad de observar cómo lo hacen sus maestros. De ahí la importancia que le damos a la verbalización por parte de la investigadora cuando es ella la que recopila y sintetiza cada uno de los problemas discutidos antes de pasar al siguiente.

Si prestamos atención a los alumnos que han resuelto bien el problema, no hay preferencias por un tipo de argumentación frente a la otra: seis se valen de una argumentación explícita y diez lo hacen implícitamente. Entre los alumnos que no llegan a resolver correctamente hay una tendencia mayoritaria por la representación simbólico-numérica sin soporte verbal.

Organización del trabajo y de la hoja de trabajo

Se observa una tendencia a organizar el área de trabajo aunque no se explicite. No disponer de hoja para cálculos hace que muchos alumnos coloquen las operaciones en los laterales del espacio reservado para trabajar y dejan la zona central para redactar la solución.

Hemos encontrado 11 alumnos que claramente organizan el espacio en datos, operaciones y resultado. Dos de ellos copian literalmente el enunciado completo, y según hemos podido comprobar al hablar con los alumnos, proceden así por inseguridad: parecen ser conscientes de que no entienden correctamente el problema. Comprobaremos más tarde que esta es su forma de proceder también en los problemas trabajados regularmente en clase pues así figura en sus cuadernos y lo reproducen en las pruebas escritas.

Tres de los once alumnos toman datos contextualizados (dos de ellos resuelven correctamente el problema siendo los únicos que llegan a hacerlo entre estos once); el resto toma nota solo de los números sin indicar la naturaleza del objeto al que se refieren.

Hay 27 alumnos que no hacen ningún tipo de referencia a la información aportada por el enunciado, sino que pasan directamente a plantear la operación que consideran adecuada.

Al observar esta variable nos fijamos también en si los alumnos han llegado a escribir una frase como solución del problema o no y si esta frase es la respuesta a lo preguntado o a una pregunta diferente. Hay 13 alumnos de los 39 que han trabajado el problema que no llegan a escribir una frase como respuesta; de estos, tres han llegado a la solución correcta.

Análisis de los errores detectados

Nuestro principal problema está en discernir qué alumnos cometen un error por problemas de comprensión de la secuencia planteada en el problema y qué alumnos, habiendo comprendido esta secuencia, lo que presentan son problemas de transformación, es decir, no saben encontrar las matemáticas necesarias para dar solución al problema y «cómo se traduce este error en el trabajo escrito de los alumnos». Solo hablando con el alumno podemos obtener información más precisa; la clasificación que presentamos es resultado del análisis de las entrevistas con los alumnos a partir del trabajo escrito de estos o del análisis de las intervenciones de los alumnos mientras estos están trabajando el problema o bien durante la exposición que hacen en gran grupo cuando son corregidos.

Un total de 23 alumnos han cometido algún tipo de error (no están incluidos los 10 alumnos que han dejado el problema en blanco). Pasamos a continuación a analizar estos errores.

Antes de proceder a corregir en grupo hicimos una encuesta sobre el problema. Pedimos a los alumnos que levantaran la mano para contestar a las siguientes preguntas:

- «¿Cuántos no entendéis el problema?», levantaron la mano 33 alumnos (del total de las tres clases).

- «¿Cuántos entendéis el problema pero no estáis seguros de saber cómo hacerlo, qué hay que hacer para encontrar la solución?», levantaron la mano 15 alumnos (solo alguno de los que lo habían dejado en blanco levantó la mano en esta ocasión, creemos que todos los que lo han dejado en blanco levantaron la mano en la pregunta anterior).

- «¿Cuántos creéis tener bien el problema?», levantaron la mano 25 alumnos; al menos tres alumnos que resolvieron bien el problema no levantaron la mano.

Los errores de comprensión y de transformación se evidencian de una forma más clara

Alumno 3B-3

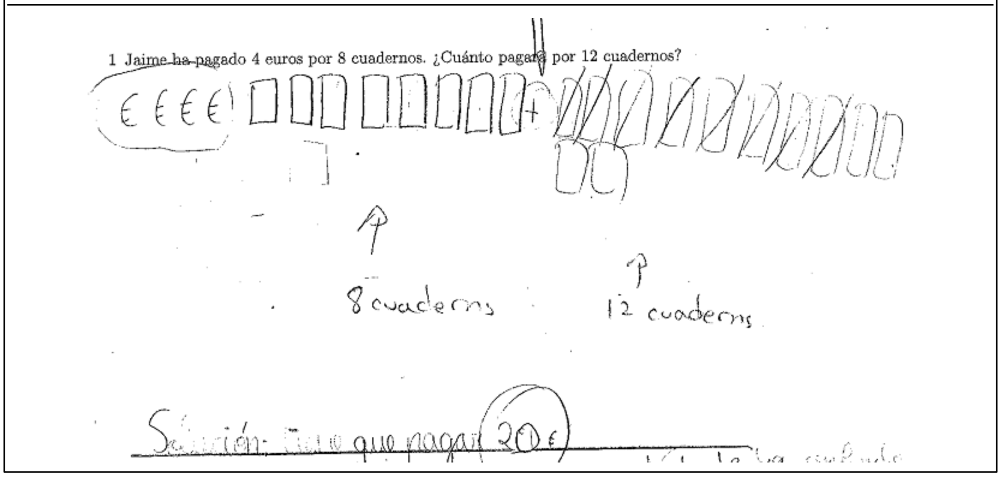


Figura 3.6: Ficha 1. Problema 1. Error de transformación.

a partir del análisis de los errores de procedimiento a los que dan lugar y sobre todo a partir de la conversación con el alumno.

- Errores de transformación (código E3). Un ejemplo de este caso es el que nos muestra el trabajo y la conversación con el alumno 3B-3. Concluimos que parece haber entendido el proceso planteado por el problema pero no sabe trasformar este proceso en un razonamiento matemático. Del diálogo mantenido con él creemos deducir que está buscando una relación numérica (ha borrado la operación $8 + 4$ y la ha sustituido por el dibujo). Las notas de la investigadora que aparecen en la figura fueron tomadas durante la entrevista con el alumno, al que pedimos que nos explicara el problema:

  A3: con 4 euros he comprado 8 cuadernos, ahora tengo que comprar 12 cuadernos (señala con el dedo los euros y los primeros cuadernos que ha dibujado);

  I: explícame qué es esto que has dibujado, (señalando cada una de las partes, ver las notas en el dibujo, el alumno indica que son los cuadernos que tiene que comprar), ¿y esto que está tachado?;

  A12: (silencio). (C1. P1)

  En algún momento el alumno ha intuido que debía calcular el precio de cuatro cuadernos más pero no ha sabido llevar a buen puerto este pensamiento. El signo «+» que ha escrito como nexo entre la acción inicial y la final le ha llevado a confundirse y considerar que finalmente necesita 20 euros para comprar los cuadernos (figura 3.6).

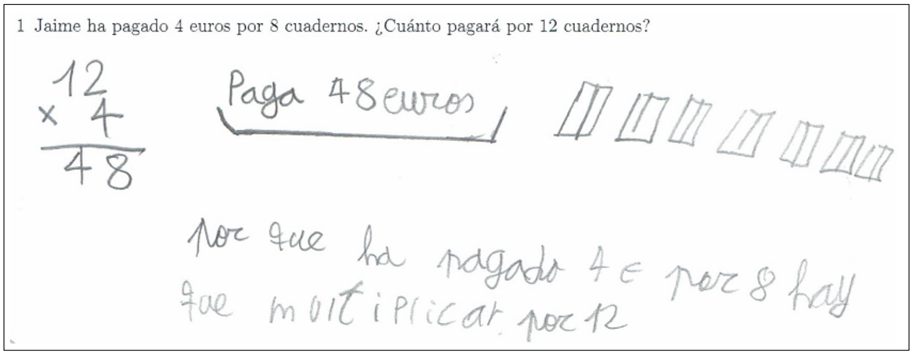
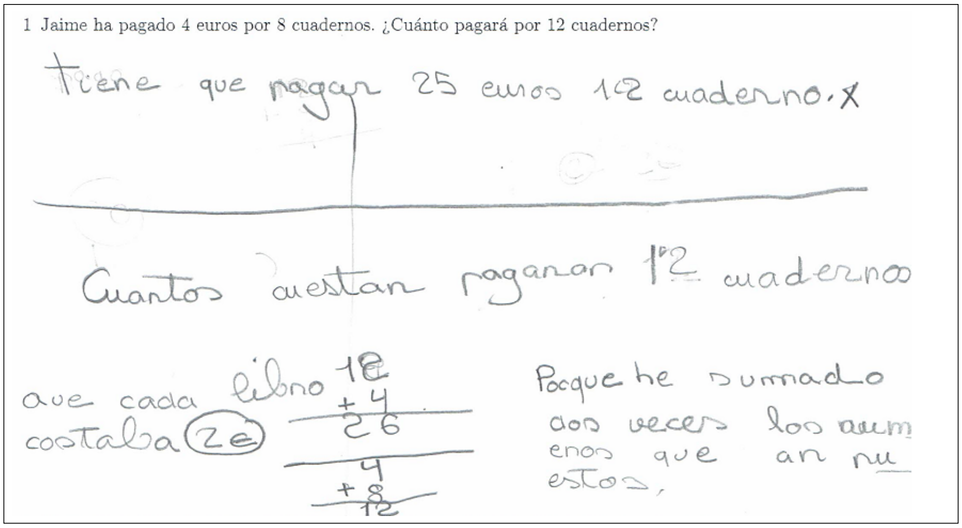


Figura 3.7: Ficha 1. Problema 1. Error de comprensión sobre el significado de las operaciones planteadas.

- Errores de procedimiento E4.1 (el alumno identifica los números que aparecen en el enunciado y escoge al azar la operación). Hay 19 alumnos en este grupo, hemos identificado siete operaciones diferentes con los números 4, 8 y 12, siendo las más frecuentes 4×8 seguida de $8 + 4$, $8 - 4$, $8 + 4 + 12$ y la naturaleza del resultado puede ser tanto cuadernos como euros. Encontramos además que entre los ocho alumnos que plantean la operación 4×8 solo uno de ellos escribe un resultado correcto para esta operación. Hay dos alumnos más que de inicio plantean la operación 4×8, les parece mucho dinero y la sustituyen por $8 + 4$. Estos alumnos nos explicaron que «no podía pagar tanto, porque antes solo tenía 4 euros» (C2. P1). En cambio hay otro alumno que nos explica con todo detalle que «el problema tiene trampa y está mal pues no puede comprar con 4 euros tantos cuadernos y su mamá tenía que darle más dinero» (C3. P1). Un ejemplo de este tipo de errores que además nos ayuda a detectar problemas de comprensión por parte del alumno es el de la figura 3.7.

- Errores de procedimiento E4.4 (no identifican las dos etapas del problema). Este error está muy ligado al anterior, pues el alumno en primer lugar no comprende que necesita conocer el precio de uno o una pareja de cuadernos para determinar cuánto pagará por los doce cuadernos (error de comprensión) y en segundo lugar no identifica las dos etapas involucradas en el problema por lo que termina seleccionando una operación cualquiera con los números del problema. En esta ocasión podríamos identificar una secuencia de errores: no se comprende el problema - no se identifican las fases en él involucradas - se selecciona una operación al azar para dar respuesta al problema. Hay 12 alumnos en esta categoría. Los alumnos eligen una sola operación, una cualquiera de las que hemos descrito en el apartado anterior. Por ejemplo hay un alumno que plantea $8 + 4 + 12 = 24$ euros; otros contestan que son 12 euros


1 Jaime ha pagado 4 euros por 8 cuadernos. ¿Cuánto pagará por 12 cuadernos?

Tiene que pagar 25 euros 12 cuaderno. X

Cuantos cuestan pagarar 12 cuadernos

que cada libro costaba 2e

18
+4
26

4
+8
12

Porque he sumado dos veces los aum enos que an nu estos,

Figura 3.8: Ficha 1. Problema 1. No encontramos explicación a su forma de proceder.

porque $8+4=12$. En el ejemplo de la figura 3.7 también se observa este tipo de error.

- Errores de procedimiento E4.5 (no encontramos explicación posible a lo que plantea el alumno). Bajo este epígrafe clasificamos el trabajo de seis alumnos pues además la conversación con ellos no nos aporta pistas sobre su forma de abordar el problema (figura 3.8).

- A partir del análisis minucioso de las respuestas y las conversaciones con los alumnos nos decantamos por indicar que podrían ser once los alumnos que no han comprendido el proceso narrado por el problema (errores de comprensión E2.1; como en dos de las aulas procedimos a escenificar el proceso, fue más fácil evidenciar este tipo de error), mientras que 12 alumnos parecen tener problemas de transformación.

Terminamos el análisis de este problema reproduciendo una de las secuencias de corrección en grupo. El alumno que sale a resolver el problema supo darnos la respuesta correcta pero su hoja estaba en blanco, y esto llamó la atención de la maestra pues se trata de un alumno con buen rendimiento en matemáticas. Este alumno no sabía cómo verbalizar su razonamiento:

- Le pedimos que lea el problema en voz alta. Al tiempo que lo va haciendo en la pizarra dibujamos cuatro círculos numerados del 1 al 4 a modo de monedas que etiquetamos como 4 euros y debajo 8 «X» que etiquetamos como 8 cuadernos.

I: ¿Cuánto dinero tiene Jaime?, y ¿qué ha hecho con él? (la respuesta del alumno es inmediata y correcta). Por favor, sigue leyendo.

A9: ¿Cuánto pagará por 12 cuadernos? (está callado un instante mirando el dibujo, se oye la respuesta de 6 euros de otro de los alumnos). Necesito 6 euros.

I: ¿Por qué necesitas 6 euros?

A2: Porque cada cuaderno cuesta cincuenta céntimos. (Interrumpe A2 y algunos alumnos muestran su extrañeza ante esta respuesta).

A9: (Dirigiéndose hacia A2), necesito 2 euros más porque tengo que comprar 4 cuadernos más.

I: (Dirigiéndose hacia A9) puedes explicarlo con el dibujo[8].

A9: (Dibuja flechas desde los círculos que simulan las monedas a las cruces de los libros). Con un euro compro dos libros, con otro euro compro otros dos libros... (y completa el dibujo hasta los doce cuadernos).

I: Y ¿cuánto tendrías que pagar por 6 cuadernos?

A9: Tres euros.

I: Le pedimos que lo explique a todos sus compañeros. Lo hace correctamente valiéndose del dibujo. Cuando A9 termina su explicación, sale a la pizarra A2 para explicar su solución, que ha dicho «vaya lío» mientras A9 resolvía el problema.

A2: Cada cuaderno cuesta 50 céntimos y como tengo que comprar 12... (plantea las operaciones tal y como hace en su hoja de trabajo), figura 3.2[9].

A9: Comenta que no necesita saber cuánto cuesta cada cuaderno. (C1. P1-2)

Indagamos sobre el grado de comprensión entre los alumnos preguntándoles acerca del precio que habría que pagar si se compraran 2, 4, 6 o 10 cuadernos y nos pareció que la mayoría lo había llegado a comprender, pero algunos alumnos permanecieron callados[10].

[8] Al revisar las notas y la secuencia creemos que el alumno había hecho uso de las relaciones numéricas conocidas que hemos identificado claramente en otros alumnos pero que nuestro dibujo le hizo cambiar su estrategia original.

[9] Esta actitud será propia de este alumno, le gustan y se le dan bien las matemáticas, de hecho se le ve disfrutar con ellas, es un alumno al que hay que ayudar a desarrollar habilidades sociales. Este comportamiento, como el de réplica y defensa de sus argumentos a A9 o la insistencia que muestra A13 en decir no lo entiendo hasta que queda convencido tanto por una forma de proceder como otra, pasan a formar parte de las anotaciones que reflejaremos en la rúbrica de actitudes sobre la que hablamos más adelante.

[10] Para este tipo de situaciones comentamos a la dirección del centro que consideren la posibilidad de dotar a cada alumno con una pizarra «velleda» sencilla que permita a cada alumno escribir su respuesta y que al levantarla la maestra pueda fácilmente identificar la situación.

En las aulas B y C optamos por pedir a sendas parejas de alumnos que decían no entender el problema o entenderlo pero no saber cómo contestar, que lo escenificaran. Sobre la mesa del profesor apilamos 12 cuadernos y un puñado de monedas de 2 euros. Los alumnos supieron escenificar la compra de ocho cuadernos; sin embargo, no supieron calcular cuánto dinero debían pagar por los doce cuadernos sin ayuda de sus compañeros. No fue posible que los dos alumnos con necesidades educativas especiales del aula C comprendieran el proceso. En ambas aulas se dieron momentos «¡Ajá!» entre alumnos que hasta ese instante no habían visto cómo proceder con el problema.

En las aulas B y C analizamos también la estrategia que comentamos a continuación:

El alumno 3B-12 llega a la respuesta numérica correcta mediante un razonamiento de proporcionalidad. Para asegurarnos de que se trataba de este tipo de razonamiento y no de un planteamiento erróneo en el que estuviera igualando cuadernos con euros le pedimos que nos lo explique:

A12: Es que 4 más 4 son 8, y como 6 y 6 son 12 (su expresión denota un poco de perplejidad pues no alcanza a comprender por qué no le entendemos).

I: Y, entonces para comprar 12 cuadernos, ¿cuánto tengo que pagar?

A12: 6 euros.

I: Y ¿cuántos cuadernos puedo comprar con 10 euros?

A12: ¿5 cuadernos? (C2. P1)

6.2. Ficha 1 - Problema 2

María ha abierto su hucha, se gasta la mitad del dinero que tenía ahorrado en un libro y después se gasta dos euros en chuches. Si ahora le quedan 5 euros, ¿cuánto dinero tenía ahorrado?

Este segundo problema es un problema de dos etapas en el que se trabaja el concepto de mitad de una cantidad desconocida, es un problema con el que introduciremos la técnica de resolución de problemas «empezar por el final» y afianzaremos la técnica de «hacer un buen dibujo» como herramienta útil para la resolución y para la explicación del trabajo realizado, al tiempo que intentaremos introducir un modelo de barras como el que se muestra en la figura 3.9.

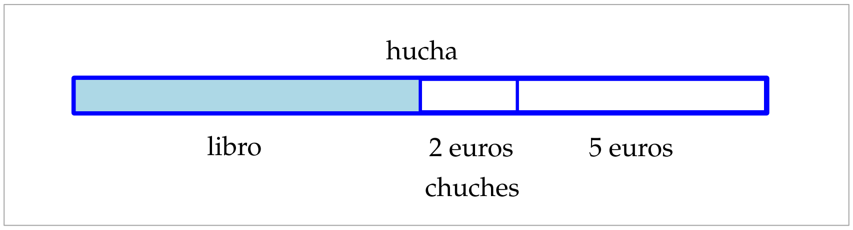


Figura 3.9: Modelo de barras para el problema 2.

El problema responde a la representación de componentes de la figura 3.10[11].

En el aula C no se ha trabajado ni este problema ni el siguiente por falta de tiempo. Contamos, por tanto, con el trabajo de 31 alumnos: cinco alumnos han resuelto bien el problema (16,1 %), doce lo han dejado en blanco (38,7 %) y catorce han cometido diversos fallos (45,2 %).

Estrategias observadas

Entre los alumnos que han respondido bien, solo encontramos dos maneras de proceder: o bien resuelven por cálculo mental una de las dos etapas o plantean las dos sumas necesarias (véase la figura 3.12). En cambio entre los alumnos que no han sabido responder correctamente hemos encontrado dos formas de proceder, en ambos casos no reconocen las dos etapas del problema. Para unos en la hucha había 7 euros y para otros 10 euros. Al analizar los errores explicamos con más detalle sus argumentos.

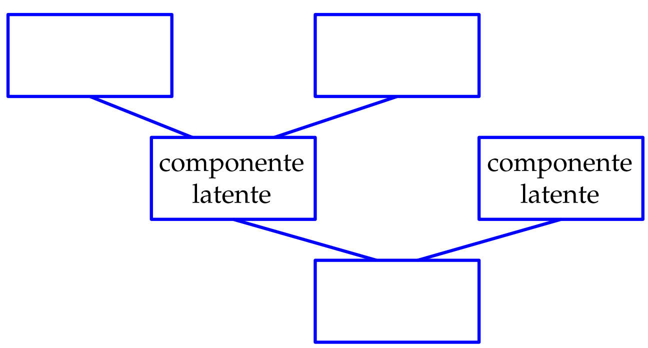


Figura 3.10: Esquema jerárquico de relaciones para el problema 2.

[11]El esquema se adapta a una estructura jerárquica multiplicativa pero no figura dentro de los tipos considerados en la bibliografía consultada.

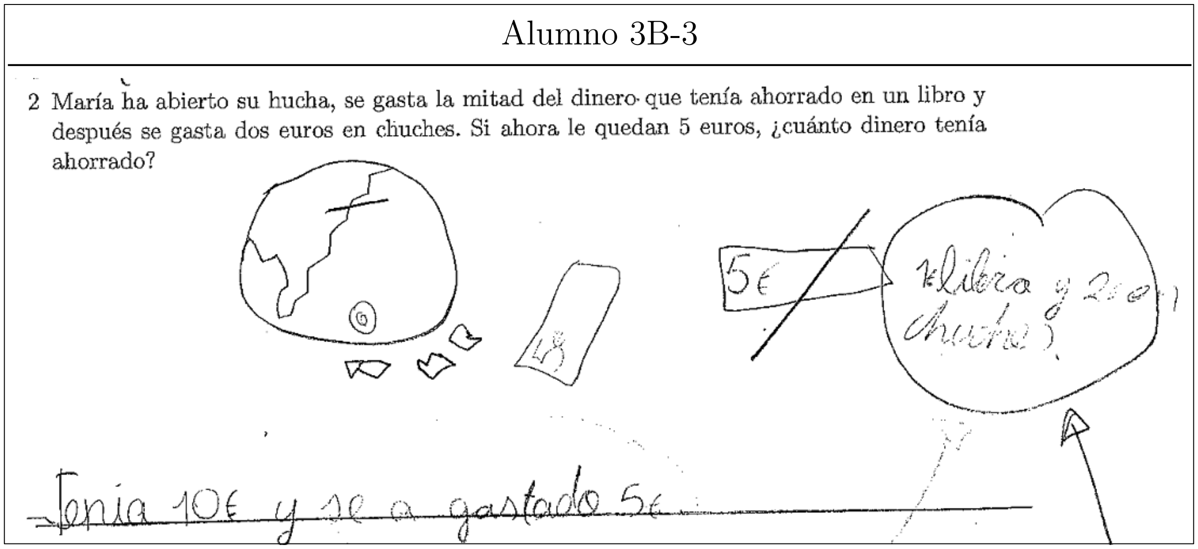


Figura 3.11: Ficha 1. Problema 2. Representación Icónica.

Representaciones utilizadas

Con la excepción de un alumno, el resto sólo ha utilizado representación símbolica-numérica para abordar el problema. Hay ocho alumnos que después de los cálculos hacen un dibujo figurativo. El único alumno que se vale de un dibujo para resolver el problema comete el error de interpretación sobre la secuencia temporal que describe el problema que mostramos en la figura 3.11.

Modos de argumentación empleados

Hay cinco alumnos que exponen sus argumentos de forma explícita, narrando la forma de proceder (dos de estos alumnos resuelven bien el problema) y 12 alumnos que exponen de forma implícita sus argumentos, uno de ellos se vale de un icono (una hucha) en el que coloca la cantidad final de 14 euros y no hace uso de ninguna expresión verbal (figura 3.12).

Organización del trabajo y de la hoja de trabajo

En el trabajo de seis alumnos se observa la disposición en Datos-Operaciones-Resultados de forma explícita, cuatro toman los datos no contextualizados y uno de ellos, el único que los toma contextualizados, sólo anota una parte de ellos. Un alumno copia literalmente el enunciado (observamos que es su forma natural de identificar los datos y que también reproduce este comportamiento en su cuaderno de trabajo y en los controles). Y 17 alumnos no parecen prestar atención a los datos y pasan directamente a escribir las operaciones, incluidos cuatro alumnos que resuelven bien el problema.

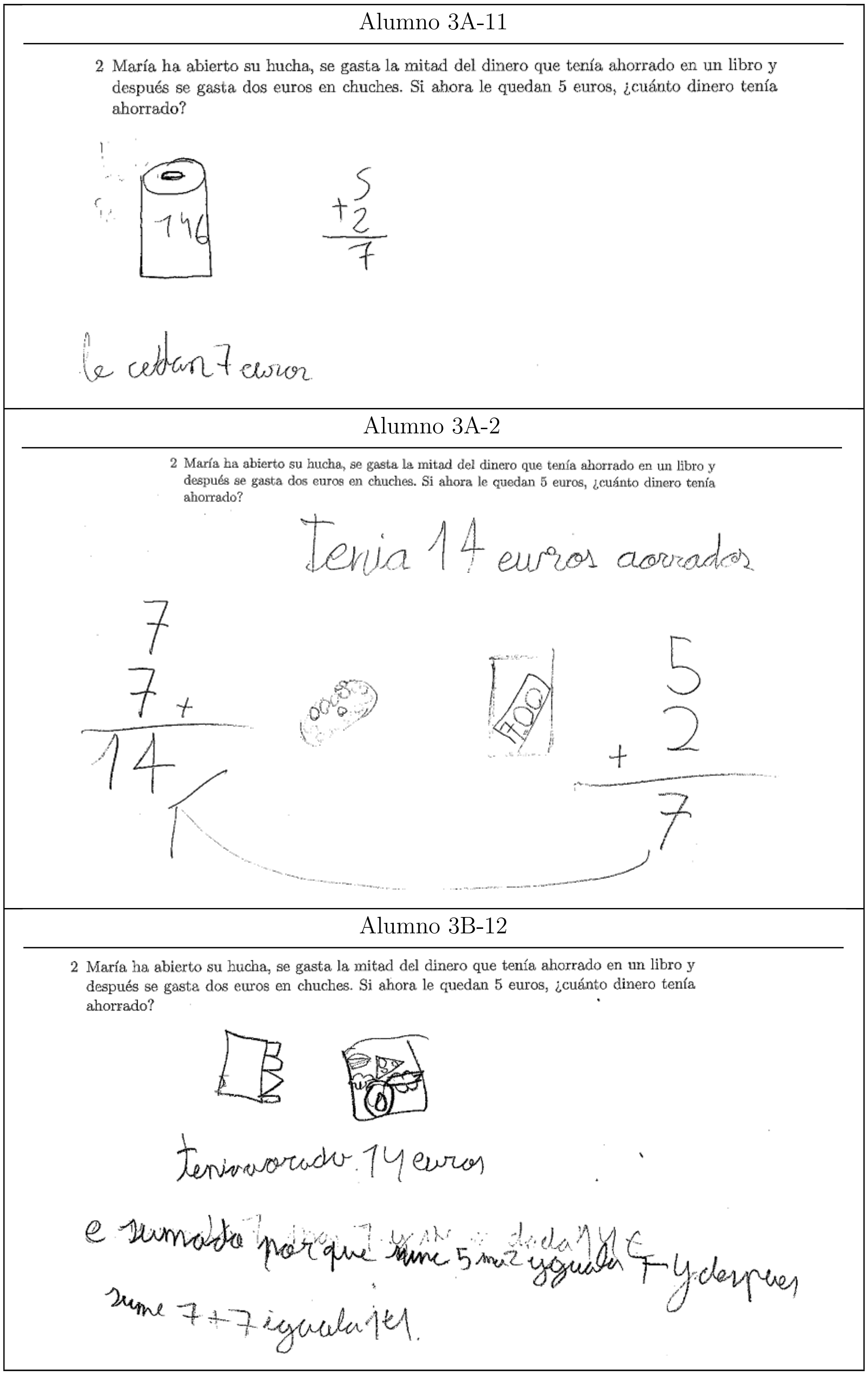


Figura 3.12: Ficha 1. Problema 2. Diferentes estrategias.

Análisis de los errores detectados

Este problema ha planteado dos tipos de dificultades: el concepto de mitad y saber razonar sobre la mitad de una cantidad desconocida. La segunda de estas dificultades entraba dentro de lo previsible, no así la primera. Algunos alumnos no fueron capaces de conectar la operación de dividir entre dos con obtener la mitad, ni la relación con la multiplicación por dos (estos alumnos no fueron capaces de contestar cuánto es la mitad de 8 o de 10), y otros no supieron identificar la construcción de dos grupos de igual cardinal al dividir entre dos o determinar la «mitad de».

Una vez más comprobamos que discernir entre errores de compresión y errores de transformación solo es posible a partir de las entrevistas, escuchando al alumno. Y que encontrarse ante uno u otro obstáculo lleva a cometer diferentes errores de procedimiento. Confirmamos, además, que los errores no son disjuntos.

- Ocho alumnos manifestaron no entender la expresión «se ha gastado la mitad» (error de comprensión E2.2), cinco de ellos dejan el problema en blanco incluso después de habérselo explicado y dos de ellos cometen otros errores sobre los que hablaremos más adelante.

- 12 alumnos parecen no entender el proceso que expone el problema. Aquí nos encontramos con dos versiones:

  - 10 alumnos que interpretan que la cantidad de dinero inicial es de 10 euros. «Pues le han quedado cinco euros, antes tenía el doble». Entre estos alumnos hemos encontrado dos razonamientos diferentes: los que interpretan que el dinero de las chuches y el libro forman parte de la primera mitad (cinco alumnos); estos alumnos están interpretando mal la secuencia temporal del problema (hemos considerado estos casos como errores de transformación). Es el caso del alumno 3B-3 de la figura 3.11. Y los que no han considerado los 2 euros de chuches (cinco alumnos); uno de ellos nos dijo que «los 2 euros son el dato que no vale, es que a veces hay datos que no valen para mirar si tu lo sabes hacer» (C2. P3). Cuando le preguntamos «¿con qué dinero te has comprado las chuches?», nos dijo que con el que había en la hucha. Sólo cuando le planteamos el problema con material manipulativo pareció que comprendía la situación. Estos casos los hemos interpretado como errores de comprensión. Se pone de manifiesto que estos alumnos están en la etapa de razonamiento concreto, se les ha «expuesto» a un razonamiento abstracto para el que todavía no están maduros y tampoco disponen de recursos gráficos que les ayuden en este tránsito. Por eso la insistencia en mostrarles como resolver el problema con material manipulativo y modelarlo graficamente.

- Para otros siete alumnos, la cantidad de dinero ahorrado es $5 + 2 = 7$. Estos alumnos (como el 3B-21 de la figura 3.13) muestran no entender las dos etapas del problema (error de procedimiento E4.4).

- El caso del alumno 3B-13 es diferente. Para este alumno la cantidad de dinero inicial también son 7 euros pero gracias a un ranomamiento muy distinto: «He calculado que tenía 7 euros antes porque $7 - 2 = 5$. Y el libro cuesta 3 euros, porque $10 - 3 = 7$ ». Revisamos este planteamiento con él, « I: te gastas 3 euros en el libro, dice el problema que en el libro te gastas la mitad del dinero que tienes ahorrado, ¿entonces cuánto tienes ahorrado?, ¿cuánto dinero hay en la hucha antes de comprar?» (se queda callado). A:«está mal, porque son 6 euros» (C2. P23-4). Seguimos repasando con el alumno, cuando él llega a la solución final es capaz de explicarnos bien todo el problema. No es capaz de hacer un dibujo para ayudarse.

- Errores de transformación: Hemos encontrado dos causas diferentes, los cinco alumnos que ya hemos explicado con anterioridad y otros tres alumnos que parecen comprender el problema pero la secuencia de operaciones que nos plantean y sus explicaciones nos inclinan a pensar que su obstáculo es transformar el proceso en una operación, como en la figura 3.14.

- Hay ocho alumnos que no escriben una frase de solución y cuatro más que contestan a otra pregunta como el caso ya explicado del alumno 3B-13.

- Dos alumnos operan de forma irreflexiva con los datos del problema.

- Y hay otros dos para los que nos somos capaces de entender lo que plantean.

Pasamos a resolver el problema a partir del modelo de barras que se muestra en la figura 3.9. En esta sesión no pudimos avanzar más por falta de tiempo.

La figura 3.15 muestra el trabajo de un alumno con errores de comprensión y toma de datos descontextualizada. En la imagen se recoge la respuesta que nos proporciona cuando le preguntamos sobre su trabajo.

Alumno 3B-21

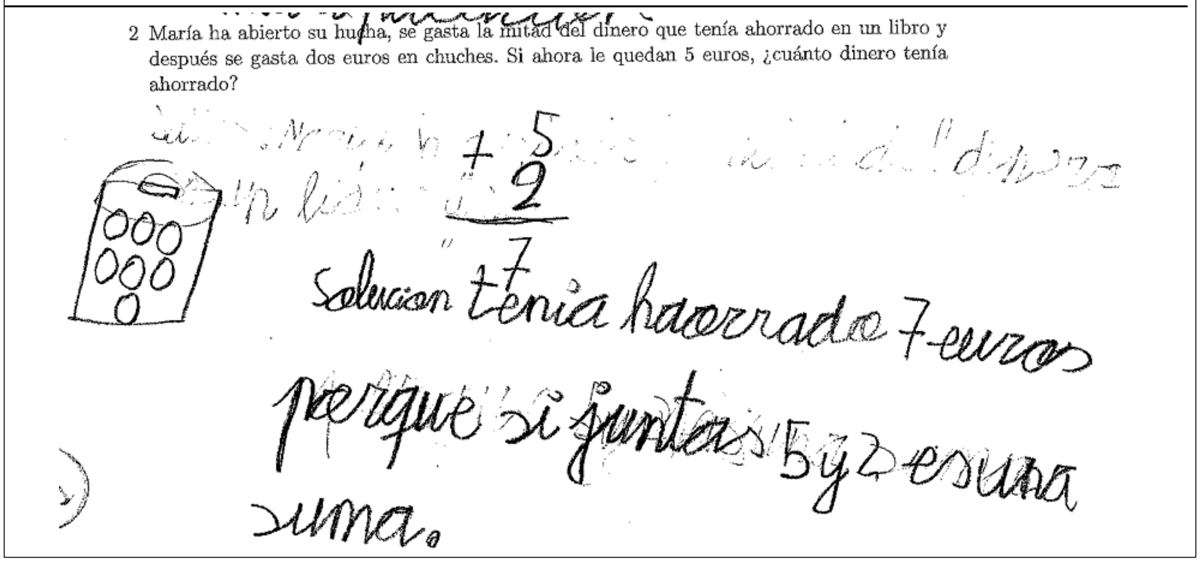


Figura 3.13: Ficha 1. Problema 2. Error al identificar las dos etapas.

Alumno 3B-5

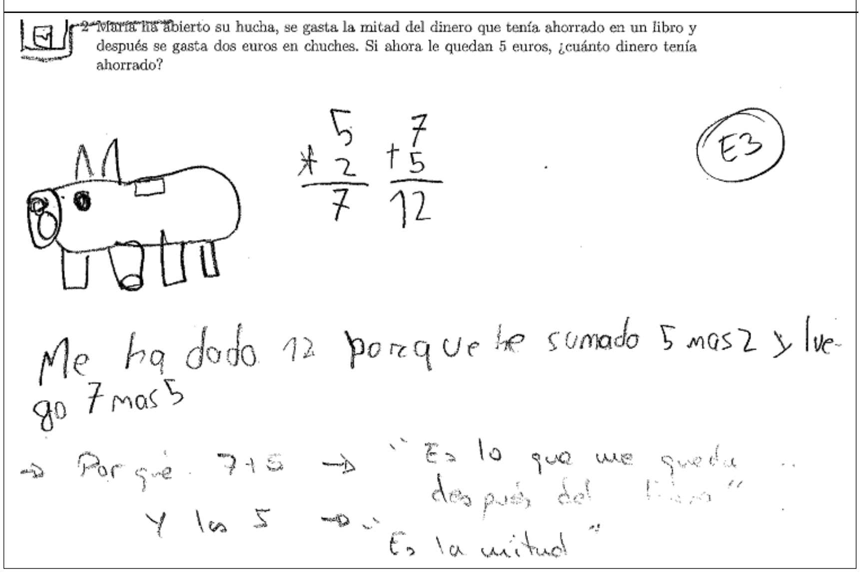


Figura 3.14: Ficha 1. Problema 2. Error de comprensión que deriva en error de transformación.

Alumno 3A-4

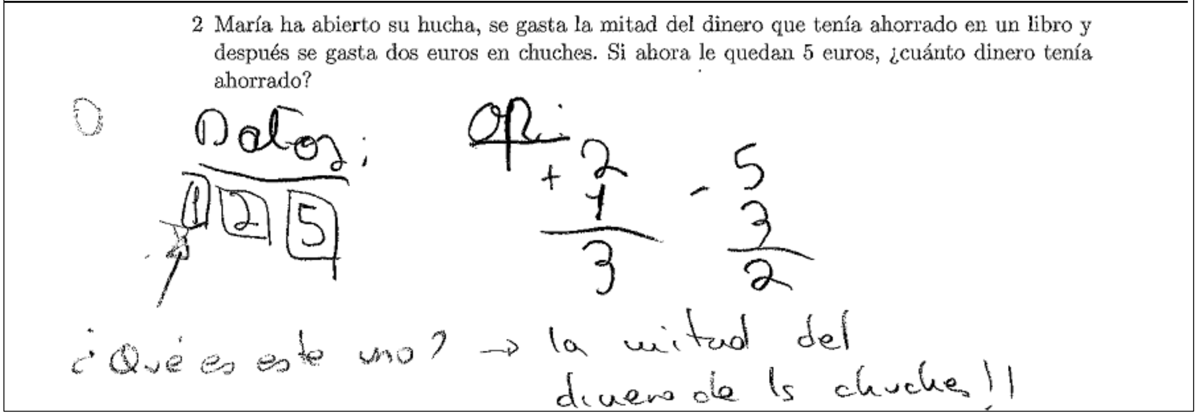


Figura 3.15: Ficha 1. Problema 2. Error de comprensión y toma de datos descontextualizados.

6.3. Ficha 1 - Problema 3

Tengo quince caramelos que quiero repartir entre Ana y Carlos. Si quiero darle a Ana el doble de caramelos que a Carlos, ¿cuántos caramelos tengo que darle a cada uno?

En este problema se trabaja un reparto no equitativo. Los alumnos no se han iniciado en el algoritmo de la división, no lo harán hasta el mes de abril. En el problema conocemos el total de elementos pero el alumno desconoce a priori el número de grupos que debe configurar y la cantidad de elementos que tendrá en cada uno de esos grupos con la salvedad de que uno de los grupos debe contener el doble de elementos que el otro.

Entre la bibliografía consultada sobre clasificación semántica de problemas no hemos encontrado problemas de estas características.

Por falta de tiempo, el problema no pudo ser corregido en clase en esta sesión. Al inicio de la siguiente sesión, la investigadora trabajó en grupo y con material manipulativo el problema (ver notas más adelante).

El problema pone de manifiesto una vez más el error de comprensión sobre los conceptos doble y mitad. Pues una parte importante de los alumnos que lo dejaron en blanco dijeron: «es que no sé que es "si quiero darle a Ana el doble de caramelos que a Carlos"».

Contamos con el trabajo de 31 alumnos:

- Once alumnos han sabido resolverlo correctamente ($35{,}5\,\%$)(hay tres alumnos que no muestran su trabajo, pero redactan una frase de solución correcta, dos de ellos han borrado el trabajo inicial, se adivina lo que escribieron y parece indicar una división entre dos y luego ensayo y error, y al tercero de ellos le sugerimos que intentara resolver el problema con las pinturas de su estuche cuando pidió ayuda).
- Doce alumnos lo han dejado en blanco ($38{,}7\,\%$).
- Ocho alumnos muestran errores de diferente naturaleza ($25{,}8\,\%$).

Estrategias observadas

Hemos encontrado tres estrategias diferentes entre los alumnos que han contestado correctamente:

- Aritmética: dividen $15 : 3$ y le asignan a Ana $2/3$ y a Carlos $1/3$. El argumento que exhiben estos dos alumnos es muy distinto: el alumno 3A-2 escribe directamente el resultado; cuando le pedimos que nos lo explique dibuja los quince caramelos y los divide en $1/3$ y $2/3$. En cambio, el alumno 3B-13 nos responde que ha dividido 15 entre 3 y después ha restado para saber lo que le tiene que dar a Ana (figura 3.16).
- Ensayo y error: reparten los caramelos en 7 y 8 y van ajustando las cantidades hasta llegar a un reparto que cumpla con las condiciones del enunciado, como el alumno 3B-1 de la figura 3.17.
- Conteo y reparto sobre el modelo que han construido, como el alumno 3A-10: comienza representando todos los caramelos y reparte inicialmente la misma cantidad a ambos. Después comprueba que las condiciones del problema y «para que Ana tenga el doble tengo que darle los cinco que me quedan» (C1-P4). Cuando le preguntamos cómo lo haría en el caso de tener 27 caramelos, nos contesta que igual:

I: ¿Cómo qué igual?, enséñame cómo lo haces con 27 caramelos.
A10: Primero reparto 15 y con los que me quedan lo hago igual. (C1. P4)

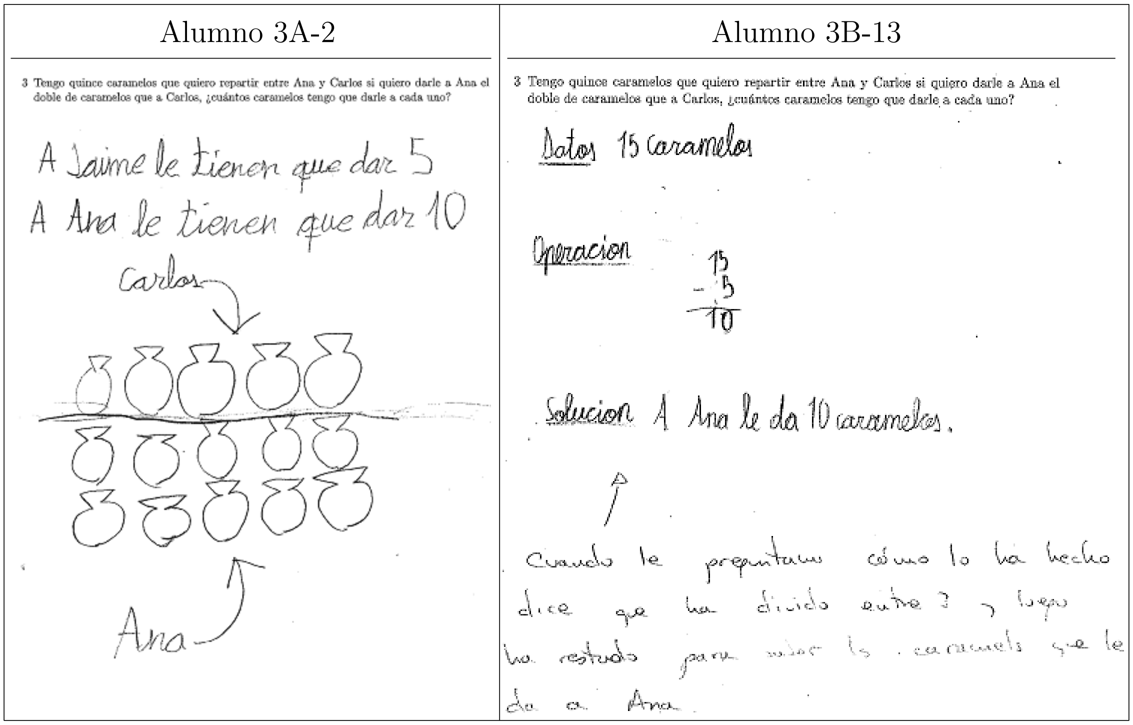


Figura 3.16: Ficha 1. Problema 3. Diferentes estrategias. Diferentes representaciones.

Entre los alumnos que no han llegado a resolverlo bien, la solución mayoritaria es repartir ocho caramelos para Ana (porque tiene que tener más) y siete caramelos para Carlos.

Representaciones utilizadas

Hay 15 niños que hacen uso de representaciones icónicas: siete niños llegan a resolverlo bien y lo hacen mediante conteo sobre el dibujo o mediante ensayo y error. Hay dos niños que hacen un dibujo figurativo sin validez para solucionar el problema, uno termina dejándolo en blanco y para el otro no sabemos interpretar su razonamiento («lo divido en cinco igual a 15 caramelos»). Los otros cuatro hacen el reparto por conteo a partir del dibujo, concluyendo que a Ana le corresponden ocho caramelos y a Carlos siete. Llama la atención que todos los niños que han resuelto bien el problema utilizan representaciones «abiertas», los caramelos están sueltos, no distribuidos en una caja que es la representación que utilizan todos los niños que no llegan a resolver el problema. Es como si el hecho de colocarlos en la caja le restara movilidad para ir ajustando el reparto a las condiciones del enunciado.

Hay siete niños que hacen uso de representaciones simbólicas tanto numéricas (uno llega

Alumno 3B-1

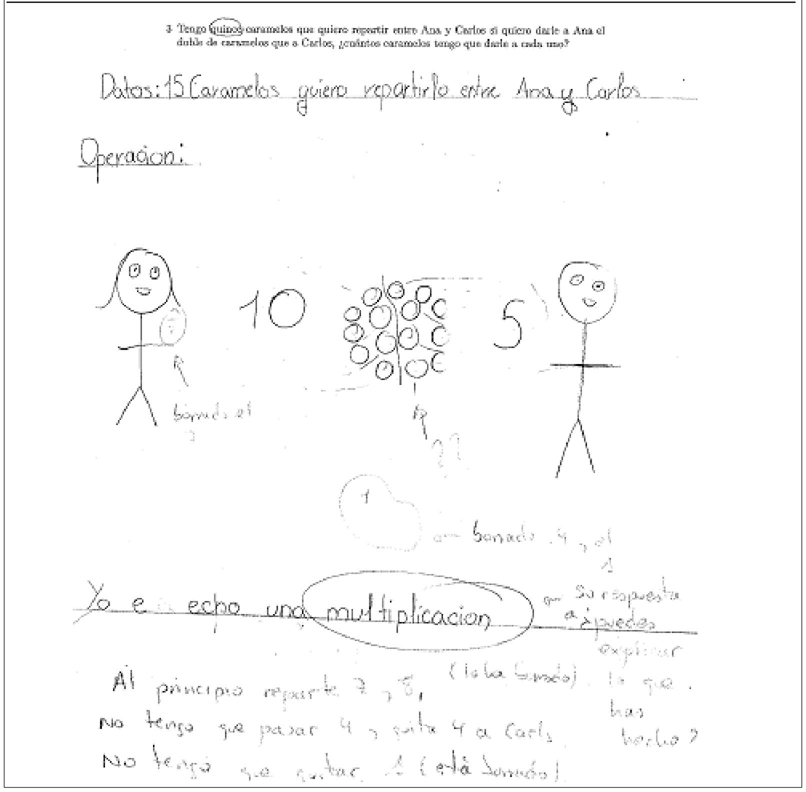


Figura 3.17: Ficha 1. Problema 1. Ensayo y error.

a repartir entre tres) como verbales, y un niño que se vale de la representación simbólico-gráfica que mostramos en la figura 3.18.

Modos de argumentación empleados

Por medio de dibujos, ocho de los alumnos explicitan su forma de trabajo y cómo llegan a la solución. Parte de esta información se pierde en los que por ensayo y error van ajustando las cantidades y borran sus ensayos infructuosos. Esto último es lo que sucede con los cinco alumnos cuya argumentación es claramente ímplícita pues su dibujo o relato sólo reproduce la situación final. Hay un alumno que cuando le hemos pedido que nos explicara su forma de solucionarlo nos ha contestado que ha hecho una cuenta pero su trabajo muestra un relato gráfico de ensayo y error que una vez que le ayudamos a verbalizarlo sabe transformar en la división y la multiplicación que le conducen a la solución, pero que no es la forma en la que él lo había resuelto. En estos momentos creemos que el alumno está dando la respuesta que «cree que debe dar, la que espera el maestro».

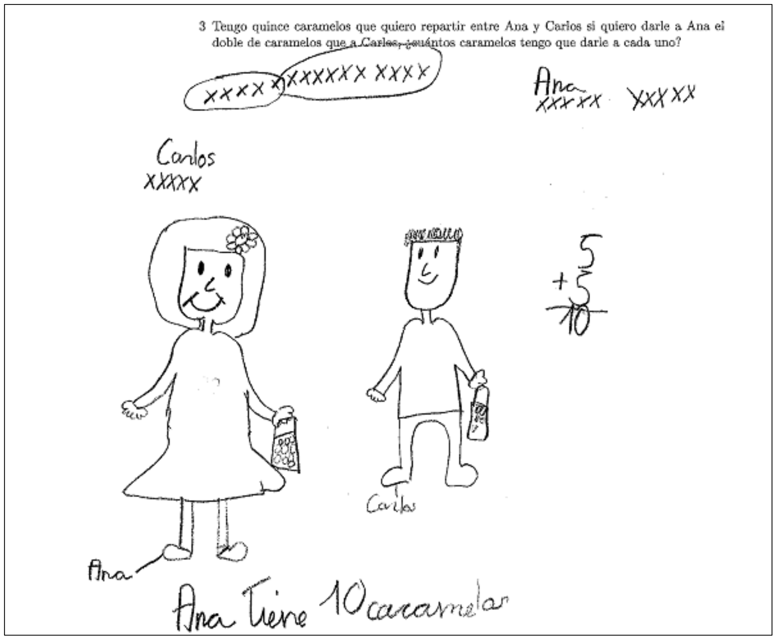


Figura 3.18: Ficha 1. Problema 1. Resolución por conteo a partir de un modelo propio.

Organización del trabajo y de la hoja de trabajo

Hay un alumno que copia literalmente el enunciado y cinco que toman nota de los datos (dos de ellos descontextualizados).

Análisis de los errores detectados

Tenemos nueve alumnos que no comprenden el proceso descrito en el problema, y de nuevo ha habido muchas preguntas sobre el doble. Incluso después de haberlo explicado en voz alta para toda la clase, decisión que tomamos después del problema anterior y antes de pedirles que trabajaran en este, hay cuatro niños que siguen sin entender el concepto.

Tenemos seis alumnos que no redactan la solución del problema, entre ellos cinco que han llegado a solucionarlo correctamente.

Como ya hemos comentado, al inicio de la siguiente sesión y valiéndonos de material manipulativo corregimos este problema con todo el grupo. Leímos el problema en voz alta, les pedimos que sacaran 15 pinturas o rotuladores de su estuche y que las repartieran en dos montones, uno para las pinturas de Ana y en el otro las que le corresponden a Carlos. Todos los niños que habían resuelto mal el problema y algunos de los que lo habían dejado en blanco (en total son doce los alumnos que no contestan nada), más un alumno que había llegado a resolverlo correctamente en la sesión anterior, repartieron en partes iguales en esta ocasión y le adjudicaron al montón que representaba los caramelos de Ana el sobrante.

I: ¿Habéis terminado el reparto?, ¿cuántas tiene cada uno?

A: (Respuestas variadas).

I: Los que tenéis 8 pinturas en un montón y 7 en el otro, vamos a comprobar que en un montón hay el doble que en el otro, ¿8 es el doble de 7? Pues algo estoy haciendo mal. ¿Podemos empezar desde el principio y repartimos siguiendo mis instrucciones?, juntad todas las pinturas y ahora haced lo que os voy dictando: hacemos dos montones: una para mí, dos para ti, una para mí, dos para ti... (vamos dibujando en la pizarra cómo estamos repartiendo...).

I: ¿Cuántas llevas repartidas?

A: (Cuentan las que lleva repartidas) 9.

I: Lleváis 9 pinturas repartidas (alguno ya ha repartido muchas más), ¿cuántas hay en mi montón y cuántas en el vuestro?

A: 6 y 3.

I: ¿Tenéis vosotros el doble que yo?

A: Sí.

I: ¿Lo estoy haciendo bien?, pues adelante, continuad con el reparto y al final me decís cuántas tiene cada montón. (C2. P4-5)

Les dejamos terminar el reparto, y les planteamos la solución gráfica con el «modelo de barras» que habíamos planteado (figura 3.19). Empezamos a constatar que es prematuro introducir la representación simbólica (abstracta en este contexto) que supone el modelo de barras. Nuestros alumnos en los cursos precedentes no han pasado por la experiencia sistemática de abordar cada problema primero a un nivel concreto (enactivo) y después pictórico (icónico) para podernos plantear en estos momentos el nivel abstracto (simbólico).

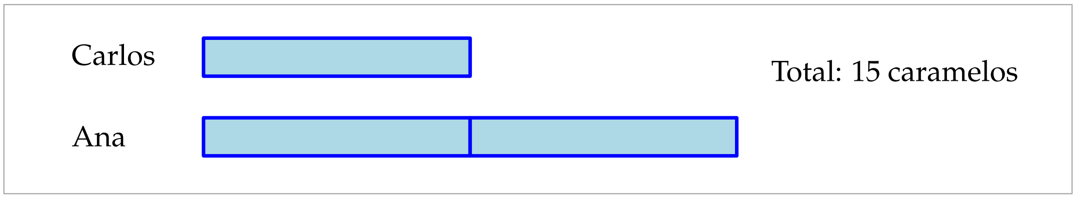


Figura 3.19: Modelo de barras para el problema 3.

6.4. Primeras conclusiones de esta sesión. Acciones para la siguiente sesión

Los resultados obtenidos con esta primera ficha nos muestran que los problemas seleccionados son verdaderos problemas para estos alumnos, incluidos los seis alumnos que han mostrado tener mejores resultados (sólo un alumno ha resuelto bien los tres problemas y cinco más han llegado a resolver correctamente dos de los tres problemas).

Tabla 3.2: Resumen de respuestas de los problemas de la ficha 1.

	Número de respuestas	Correctas	Incorrectas	En blanco
Problema 1	49	16	23	10
Problema 2	31	5	14	12
Problema 3	31	11	8	12

Fuente: elaboración propia.

Uno de los objetivos principales de toda la intervención es observar a los alumnos mientras ellos resuelven problemas. La destreza de los alumnos resolviendo problemas no puede analizarse solo a partir de sus trabajos escritos y el análisis cuantitativo de respuestas correctas e incorrectas que se muestra en la tabla 3.2; la observación directa aporta importante información sobre sus habilidades, actitudes y creencias. Por ello es importante desde el primer momento que la presencia de la investigadora no resulte un elemento distractor o que genere inseguridad.

En esta primera sesión hemos observado el recelo y la intriga que despierta en los alumnos ver que la investigadora está tomando notas mientras ellos le explican su trabajo o responden a alguna de las preguntas. Hay alumnos que tan pronto ven tomar notas a la investigadora piensan que no están respondiendo correctamente. Para minorar esta angustia en sesiones sucesivas optaremos por hacerles saber el contenido de lo que estamos anotando y que sus respuestas o la información que nos están transmitiendo es importante para nosotros. Contamos además con la discusión en grupo como elemento facilitador del trabajo investigadora-alumnos que es esencial para el buen desarrollo de la investigación.

De esta primera sesión aprendimos que el tamaño de la tipografía que habíamos escogido para la impresión de las fichas no era el adecuado, debíamos cambiar a una fuente de 18 puntos. La mayoría dijo no poder leer bien la ficha (habíamos seleccionado una tipografía de 12 puntos). El espacio para resolver los problemas también debería ser el máximo posible.

Los alumnos parecen estar acostumbrados a resolver el problema en una hoja distinta a la del enunciado, y se muestran reacios a usar el papel proporcionado por la investigadora como única hoja de trabajo. Algunos optan por escribir sobre su mesa, y también insisten en borrar los intentos iniciales de resolución si consideran que no son correctos. No consideramos la opción de hacer los cálculos en una hoja aparte pues corremos el riesgo de perder una parte importantísima de la información que nos dificultaría las tareas de interpretación.

Seguiremos proponiendo tres problemas para cada sesión, aunque con toda probabilidad en la mayor parte de las sesiones será imposible trabajar todos ellos en grupo.

Hay que insistir en el trabajo con dibujos y la disciplina de plasmar por escrito «lo que voy a hacer», «lo que he hecho y por qué», «la conclusión a la que llego» y, por último, «reviso mi trabajo en su conjunto».

En base a los resultados obtenidos se acuerda:

- Dedicar la siguiente sesión a la resolución grupal de los problemas que han quedado pendientes en esta sesión para enfatizar las pautas de trabajo verbal. En línea con Schoenfeld (1985), pensar en voz alta mientras se resuelve un problema, verbalizar el pensamiento, ayuda a los alumnos a desarrollar pautas y actitudes satisfactorias ante la resolución de problemas.

- Preparar una segunda ficha de trabajo en la que se considere un problema de dos etapas más sencillo y con una historia que les resulte más fácil de transformar que les permita utilizar las pautas de resolución sugeridas en el párrafo anterior.

- Trabajar más problemas de doble-mitad. Con cantidades que permitan el cálculo de la mitad y el doble de una cantidad a partir de lo adquirido por su experiencia o un dibujo sencillo (enactivo-concreto) para poder avanzar los conceptos de mitad-medio, triple-tercio, la cuarta parte, etc., que deben abordarse de acuerdo con el currículo oficial en el plazo de dos meses.

- Plantear problemas que supongan un reto y en los que la técnica o heurística empleada pueda resultar fácil de transferir a los problemas que están trabajando en su libro de texto o en las hojas de problemas que les proponen sus maestras. Es común en los cursos de resolución de problemas que se organizan para maestros o se imparten en la universidad trabajar con problemas diseñados ex profeso para ilustrar una técnica heurística concreta y que no son afines a los que luego estos mismos profesionales tienen que trabajar en sus aulas. Queremos evitar que los problemas que trabajamos en clase queden aislados del resto de los contenidos estudiados y que el alumno pueda transferir lo aprendido durante esta intervención a su quehacer diario. En cierto modo Schoenfeld (1982) parece sugerir algo en esta línea cuando dice que una técnica o heurística trabajada en un problema concreto es difícil de transferir incluso entre problemas del mismo estilo.

- Trabajar de manera sistemática la respresentación pictórica como herramienta heurística, avanzar en el modelo Concreto-Pictórico-Abstracto e introducir el modelo de barras como herramienta pictórica.

- Nos planteamos dar un tiempo para trabajar cada problema y acto seguido corregir en grupo. Comprobaremos si esto nos permite una gestión del tiempo de aula más eficaz aun a costa de la libertad del alumno para organizar su secuencia de trabajo.

El uso de dibujos es una herramienta heurística que se ha mostrado muy eficaz en la resolución de problemas (Yancey, Thompson, y Yancey, 1989; Nunokawa, 1994; Van Meter, 2001), y figura, como ya hemos visto, entre las heurísticas recomendadas por Pólya y Schoenfeld. Un dibujo del problema, desde una perspectiva pedagógica, está alineado con las teorías del aprendizaje de Bruner (1961): conocimiento enactivo (concreto), conocimiento icónico (pictórico) y el conocimiento simbólico (abstracto), y con nuestra interpretación de la comprensión y conocimiento matemático. Desde estos enfoques, el modelo de barras se presenta, a partir de su naturaleza pictórica, como un puente entre lo concreto y lo abstracto, permitiendo a los alumnos en primer lugar visualizar y entender el problema antes de avanzar hacia la naturaleza abstracta de los números y su notación. Esta es una de las líneas de investigación que vamos a abordar en un futuro inmediato.

Estos problemas nos han permitido además evidenciar la falta de comprensión sobre las relaciones entre suma-resta, multiplicación-división. Investigadores como Nesher, Greeno y Riley, (1982); Kouba (1989); Fischbein et al. (1985); Marshall (1995), entre otros, han encontrado que hay un nivel de desarrollo cognitivo en el que los niños integran los esquemas parte-parte-todo trabajados en la construcción del número con la suma y la resta para encontrar la cantidad desconocida en un problema verbal. En este sentido los diagramas de barras van más allá pues no solo permiten visualizar el problema sino que muestran las relaciones presentes en el mismo. La instrucción procedimental recibida por nuestros alumnos no les ha permitido crear estas relacionales básicas por lo que asumimos la tarea de empezar desde un escalón inferior. Empezaremos por trabajar la comprensión de doble y mitad y la interrelación entre ambas.

Y por último nos ha llamado la atención la predisposición que muestran a pensar que los problemas tienen «enunciados o datos tramposos». Les hicimos ver que los problemas que plantearíamos en nuestras fichas no responderían a este esquema. Creemos que con las dificultades de comprensión y transformación que hemos encontrado, hacer uso de enunciados más largos y complicados en los que se faciliten datos innecesarios solo les llevará a confusión.

Actitudes observadas en el aula

En esta primera sesión casi todos los alumnos han estado muy concentrados y entregados a la tarea. Se han mostrado como alumnos muy participativos y que demandan mucha atención y ayuda. Solo ha habido tres alumnos cuyo comportamiento ha sido, según nos han indicado las tutoras, un tanto disruptivo desde el comienzo de curso, y a los que en momentos puntuales la maestra se ha visto obligada a llamarles la atención, con éxito relativo. Estos alumnos no han trabajado mucho.

Exponemos a continuación algunas de las situaciones que han llamado nuestra atención:

- Tenemos dos alumnos, de clases distintas, que se han echado a llorar, en silencio y muy discretamente en ambas ocasiones. Cuando esto ha sucedido por primera vez nos hemos quedado un poco aturdidos. Su hoja estaba completamente en blanco y el alumno llorando. Hemos consultado con la tutora en ambas ocasiones, ellas no se han mostrado sorprendidas, no es nuevo para ellas, pero sí un poco resignadas. La primera vez que nos ha sucedido nos hemos puesto a trabajar con el alumno. Le hemos pedido que eligiera un problema para intentar resolverlo juntos. Ha elegido el primero. Hemos tomado ocho libros de la estantería y cuatro euros del monedero. Le hemos pedido que leyera el enunciado y nos lo contara, le hemos preguntado cuánto habría que pagar por cuatro y por dos cuadernos y después cuánto tendría que pagar por doce cuadernos. Hemos conseguido que resolviera correctamente el problema pero no ha dado tiempo a más. A la hora de recoger la hoja de problemas no la quería entregar pues no había podido escribir la solución ni resolver ningún problema más, «es que no he hecho nada». «¿Cómo que no has hecho nada, yo creo que has hecho mucho, cuántos sabías hacer al principio?, al principio sí que no habías hecho nada pero ahora ya has hecho un problema y está muy bien» (C1. P2). No se ha quedado muy convencido.

Cuando esto ha sucedido por segunda vez le hemos dicho que si quería trabajar con un amigo y nosotros podríamos ayudarles si tenían dudas. Se ha calmado y lo ha intentado solo, no lo ha resuelto bien pero se ha esforzado y ha pedido ayuda en un par de ocasiones para asegurarse de que estaba interpretando correctamente la situación correctamente. Hemos podido comprobar que sus bloqueos se deben en primer lugar a falta de confianza en sí mismo, y en segundo lugar a un problema de comprensión del tipo E2.1, no es capaz de identificar que está sucediendo en el problema. Durante la corrección ha permanecido en silencio.

- Ha habido alumnos que han permanecido completamente en silencio y ante su hoja en blanco. Cuando les hemos preguntado si necesitaban ayuda solo han alcanzado a contestar «es que no lo entiendo». Durante la resolución grupal nos hemos dirigido a ellos para asegurarnos de que eran capaces de seguir las explicaciones. No ha sido así en todos los casos. Pero en algunos sí se ha dado el momento ¡Ajá!

- Alumnos que aunque su solución no es correcta, quieren contar lo que ellos han hecho. Esta situación no es nueva, también la observamos en alumnos universitarios. No alcanzan a comprender dónde está el error de lo que ellos han planteado o en qué difiere de la solución que se está mostrando como correcta porque no comprenden bien el problema o la solución. Pero valoramos positivamente el hecho de querer participar.

- Hemos observado un cierto nivel de competitividad en todas las clases entre los alumnos que quieren el rol de «mejores en matemáticas»; algunos de ellos muestran una actitud desinteresada hacia las soluciones de sus compañeros. No es el caso de otros que discuten con interés la solución del compañero.

7. Análisis de la ficha 2

Planteamos de nuevo tres problemas, dos de ellos son problemas de dos etapas y el tercero es un problema de una sola etapa.

Además, se han planteado cambios en la metodología de trabajo en el aula: se pensó, y así se hizo en las aulas A y B, trabajar los problemas en orden numérico y establecer un tiempo de 10 a 12 minutos para el trabajo individual y a continuación pasar a corregir en grupo. Fueron necesarios en promedio 30 minutos para el trabajo individual de los problemas uno y dos y esto nos obligó a dejar el problema número tres para ser trabajado por las tutoras de clase de acuerdo con su agenda y preferencias.

7.1. Ficha 2 – Problema 1

Enunciado del problema:

> Cuatro amigos tienen cada uno 3 euros y quieren comprarse un balón que les cuesta 17 euros, ¿cuánto dinero les falta?

El problema responde a un esquema jerárquico idéntico al del problema 1 de la ficha 1 (figura 3.1). La estructura semántica es más sencilla que en aquel pues es claramente identificable una primera etapa multiplicativa a la que le sucede una comparativa. Para dar respuesta a la primera etapa el alumno puede valerse de una representación icónica, del cálculo mental o plantear explícitamente la operación aritmética. El modelo de barras del problema tal y como se presenta en la figura 3.20 parece también accesible a los alumnos. No es necesario plantear aritméticamente la segunda etapa pues puede hacerse también mediante cálculo mental. El orden de magnitud de los números involucrados en el problema no plantea dificultades y esto debería permitir a los alumnos comprobar la solución obtenida con facilidad.

Es un problema rutinario que no debería presentar dificultades de comprensión ni de transformación con lo que los niños pueden centrarse en explicar su proceso de resolución, comprobar la solución obtenida y redactarla convenientemente.

Contamos con el trabajo de 29 alumnos para el análisis de este problema: dieciocho lo han resuelto bien ($62{,}1\,\%$) y once han cometido errores ($37{,}9\,\%$). Ningún alumno lo ha dejado

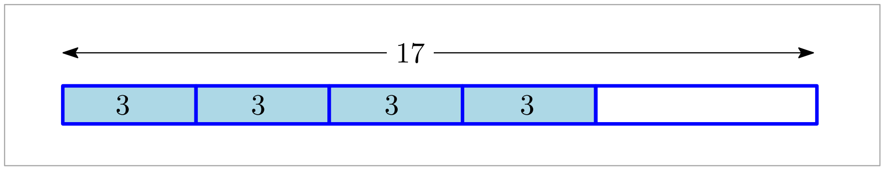


Figura 3.20: Modelo de barras para el problema 1.

en blanco. Todos ellos dicen comprender el enunciado y en cierto modo les resulta un problema «familiar y fácil».

Estrategias observadas

No es un problema que se preste a una amplia variedad de estrategias más allá de decantarse por utilizar el cálculo mental o no, transformar la primera etapa en una suma o una multiplicación y la segunda en una resta o una suma. En este sentido hemos observado que:

- Cinco niños optan por resolver la primera etapa mediante cálculo mental; sólo un niño opta por utilizar cálculo mental también para la segunda etapa (y lo resuelve correctamente). Dos niños optan por utilizar una suma para la segunda parte, lo resuelven bien; y los otros dos niños no comprenden el problema y eligen al azar la operación u operaciones que utilizan en esta segunda parte.

- Doce niños optan por plantear una multiplicación para la primera etapa: ocho plantean una resta para la segunda parte del problema, todos resuelven correctamente el problema; uno emplea cálculo mental y otro más lo resuelve mediante una suma (ambos resuelven con éxito el problema), y los otros dos no abordan esta segunda etapa.

- Nueve niños platean una suma para la primera etapa y resuelven la segunda con cálculo mental, o una resta. En este grupo hay cuatro niños que resuelven bien el problema.

Hemos pormenorizado este aspecto porque el tipo de operación utilizada nos da una medida del grado de confianza que tienen en sí mismos (aquellos que se valen del cálculo mental entendemos que se sienten más confiados en su capacidades aritméticas) y del dominio que tienen sobre la multiplicación.

Representaciones utilizadas

- Hay 15 niños que hacen un dibujo que representa la primera etapa, sólo uno de ellos hace un mal dibujo (un dibujo que no puede ayudarle a resolver el problema). Pero tan solo 11 alumnos llegan a resolver el problema. Observamos que utilizan los dibujos para representar los datos más que como herramienta de resolución (hay un niño que organiza el espacio en Dibujo-Operaciones-Resultado). Y algunos de estos dibujos no cuentan con lenguaje verbal o símbolos que permitan que el dibujo efectivamente sea parte de la solución del problema.
- 14 niños se valen de la respresentación simbólica: once de ellos plantean tan solo las operaciones (siete resuelven correctamente el problema, como el alumno 3A-8 en la figura 3.22), y en ninguna de las operaciones se indican las unidades de medida. Salvo el caso de aquellos niños que aprovechan la línea del resultado para plantear ya la respuesta y entonces le ponen el símbolo del euro. No hay ningún niño que plantee las operaciones en horizontal, todos lo hacen en vertical. Dos niños utilizan representación verbal y uno lo resuelve bien, mientras que el otro se pierde en su narración.

Modos de argumentación empleados

Confirmando las representaciones y las estrategias utilizadas, hay una mayor tendencia hacia las operaciones aritméticas (18 alumnos), esto es, a utilizar argumentos implícitos. Sin embargo, ya hay seis alumnos que narran lo que van a hacer antes de ponerse a operar.

Entre los alumnos que han resuelto bien el problema hay una mayor tendencia a utilizar argumentaciones implícitas. Ya observamos esto en la ficha anterior: si saben hacer el problema consideran que está suficientemente explicado con lo que plantean como resolución.

Organización del trabajo y de la hoja de trabajo

Este problema se presta a dar rienda suelta a su impulso ejecutor. Hay 23 niños que no dejan constancia de haber tomado nota de los datos ni de organizar el espacio; de hecho, muchos de ellos escriben la segunda operación a la izquierda de la primera. No parece que el espacio reservado para trabajar este problema haya sido insuficiente, como sí nos pasó con alguno de los problemas de la ficha 1.

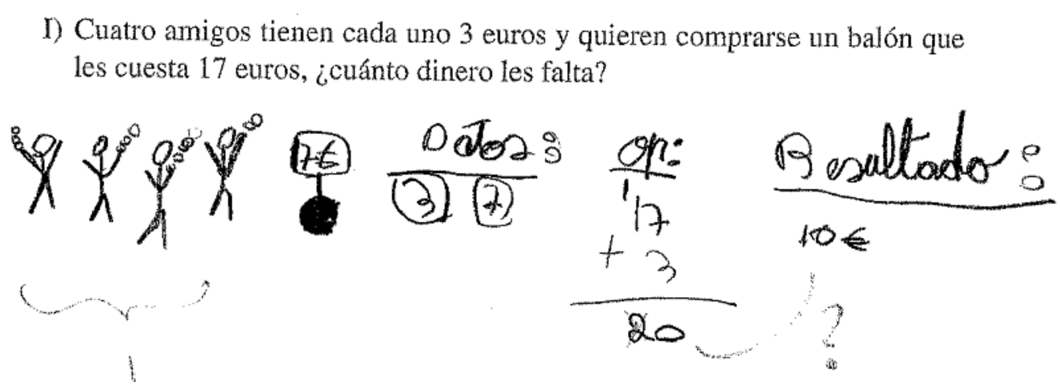
Hay seis alumnos que registran especificamente los datos, tres de ellos descontextualizados.

Análisis de los errores detectados

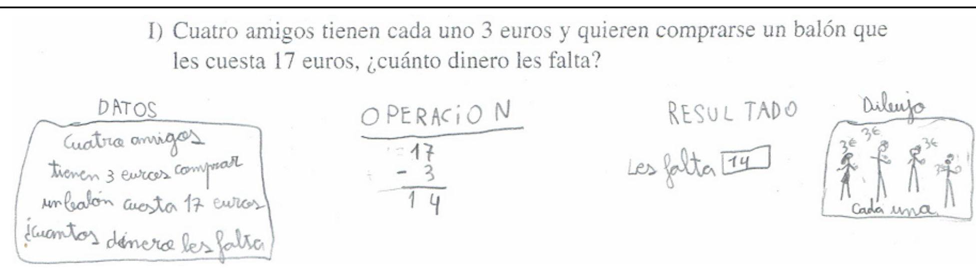
Todos los errores detectados en este problema reflejan un error de comprensión sobre la historia narrada en el enunciado y su consiguiente error de transformación. Diferenciamos dos bloques:

- Hay seis alumnos que operan con los datos del problema de manera totalmente irreflexiva. Cuatro de ellos (figura 3.21) han llegado a hacer una buena representación icónica y al preguntarles por la misma han indicado que son los amigos con el dinero que tienen. Estos alumnos parecen entender el enunciado y el proceso pero no saben cómo plantear la operación necesaria ni fueron capaces de verbalizar qué es lo que hay que hacer para responder a la pregunta planteada.

Alumno 3A-4



Alumno 3A-9



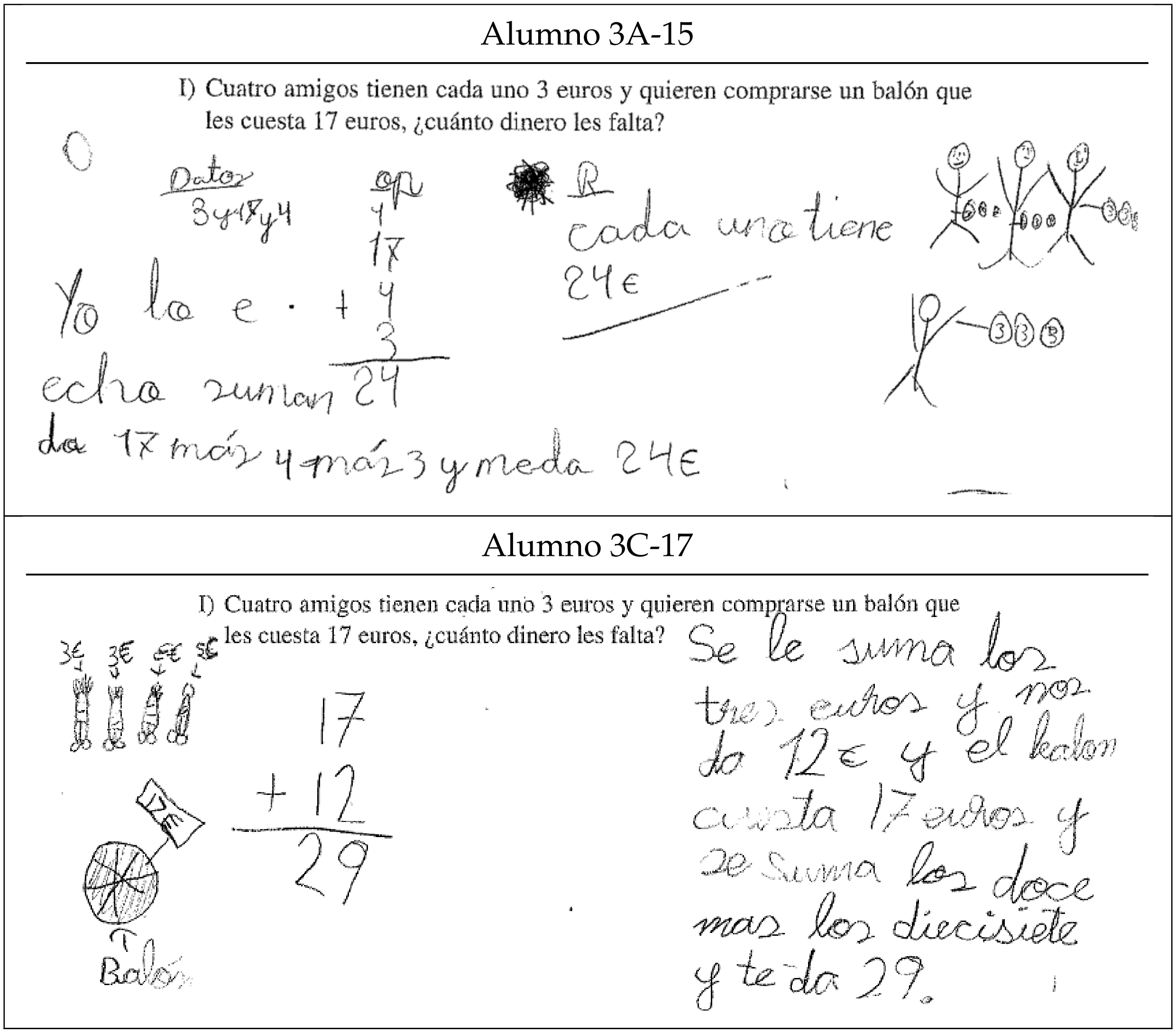


Figura 3.21: Ficha 2. Problema 1. Errores de comprensión y operaciones aleatorias.

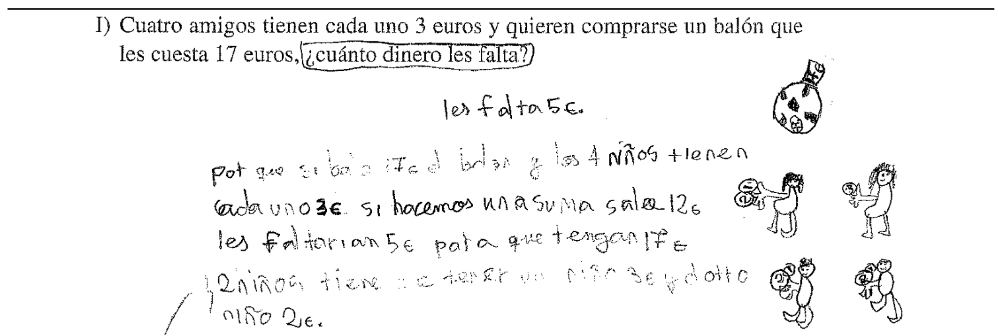
- Otros seis alumnos han omitido el término «cada», e interpretan que los tres amigos disponen de tres euros en total. Unos han planteado la operación $17+3$ (como el alumno 3A-4 de la figura 3.21) y otros $17-3$ (como el alumno 3A-9 de la figura 3.21). Al preguntarles por su planteamiento en general supieron explicarnos el porqué de sus respuestas. Todos parecían entender el enunciado pero mostraron no entender las operaciones que habían planteado. Esta situación se pone de manifiesto cuando le pedimos al alumno 3A-9 que nos haga un dibujo para explicar el problema; se observa que interpreta correctamente el enunciado pero lo transforma erróneamente.

Dos alumnos, uno cuya solución era aritmética y otro que había utilizado un dibujo, salieron a explicar su proceso de resolución. También trabajamos entre todos la solución del problema con la ayuda del modelo de barras. Esta forma de proceder les resulta muy extraña, hay una diferencia entre utilizar un dibujo para representar los datos y que el dibujo sea el proceso de resolución y esté mostrando las relaciones establecidas en el problema. Aquellos alumnos que habían planteado su problema como «¿cuánto me falta para llegar a 17 euros?» lo entendieron más rápidamente que los que no se habían preguntado en estos términos.

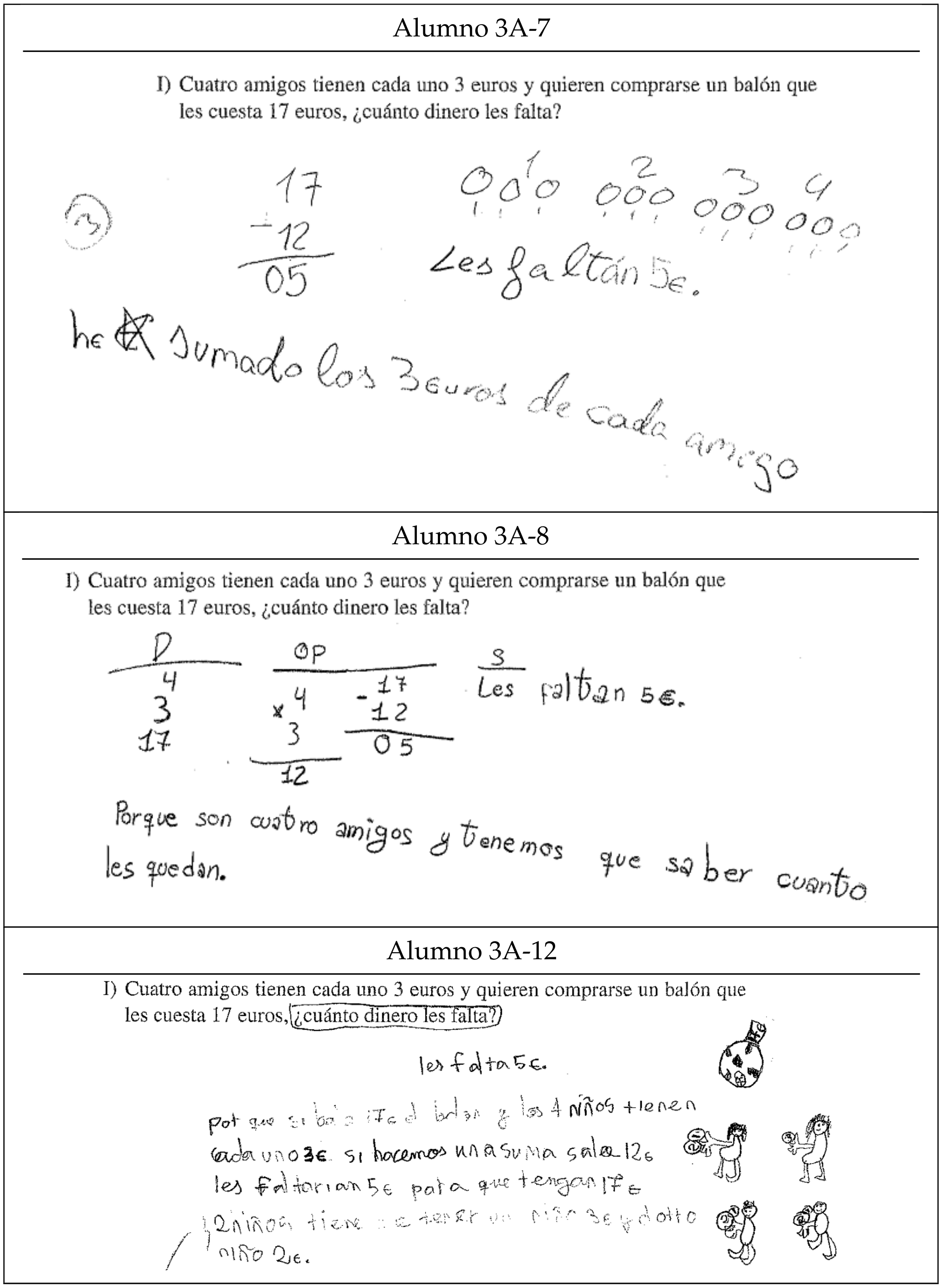
Hacer uso del modelo de barras tanto para representar los datos como para resolver el problema es para alguno de los alumnos una formulación del problema «algo abstracta». También para introducir esta metodología es conveniente recorrer las tres etapas: concreta, pictórica y abstracta. Tal y como muestra la secuencia que ilustramos en la figura 3.23. El orden de magnitud de las cantidades que aparecen en este problema permite el trabajo gráfico de cada una de ellas y facilita la comprensión del modelo[12].

La figura 3.22 muestra tres soluciones correctas. Dos alumnos han hecho uso de diferentes representaciones para abordarlas (alumnos 3A-7 y 3A-8) mientras que el alumno 3A-12 utiliza el dibujo para explicar su proceso de resolución. Este alumno entendió sin problemas el modelo de barras pues se adapta bien a su forma de interpretar el problema.

Alumno 3A-12



[12]Iniciarse en la resolución de problemas haciendo uso del modelo de barras forma parte de las líneas de investigación futuras de este estudio. La formación y entrenamiento que el profesor necesita para enseñar a sus alumnos a aplicar el modelo no es desdeñable y en el caso particular de los alumnos estos concluidos que es conveniente comenzar por resolver los problemas modelizándolos con material concreto como los cubos multilink. En esta investigación seguiremos mostrando a los alumnos el uso del modelo pero no les pediremos en ningún momento que ellos lo apliquen.


Alumno 3A-7

I) Cuatro amigos tienen cada uno 3 euros y quieren comprarse un balón que les cuesta 17 euros, ¿cuánto dinero les falta?

17
- 12
05

Les faltan 5€.

he sumado los 3euros de cada amigo

Alumno 3A-8

I) Cuatro amigos tienen cada uno 3 euros y quieren comprarse un balón que les cuesta 17 euros, ¿cuánto dinero les falta?

D: 4, 3, 17

OP: 4 × 3 = 12; 17 − 12 = 05

S: Les faltan 5€.

Porque son cuatro amigos y tenemos que saber cuanto les quedan.

Alumno 3A-12

I) Cuatro amigos tienen cada uno 3 euros y quieren comprarse un balón que les cuesta 17 euros, ¿cuánto dinero les falta?

les falta 5€.

por que si vale 17€ el balon y los 4 niños tienen cada uno 3€ si hacemos una suma sale 12€ les faltarian 5€ para que tengan 17€

¿2 niños tiene que tener un niño 3€ y otro niño 2€.

Figura 3.22: Ficha 2. Problema 1. Soluciones correctas. Distintas formas de representación.

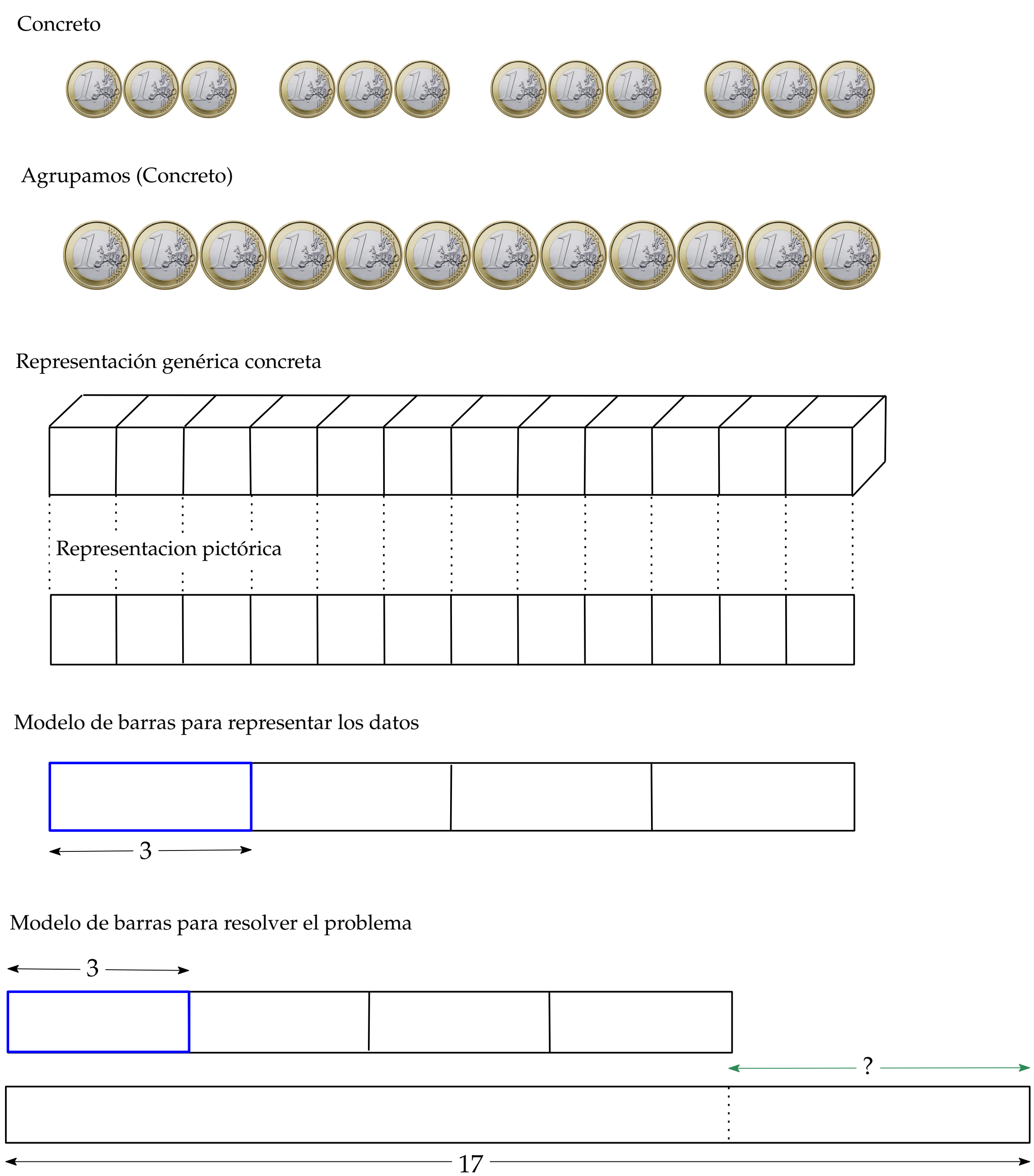


Figura 3.23: Fases de la introducción del modelo de barras.

7.2. Ficha 2 – Problema 2

Paula tiene 3 euros. Su amiga Alba tiene el doble. Y Jaime tiene el doble de dinero que Alba. ¿Cuánto dinero tienen entre los tres? ¿Pueden comprar el balón que cuesta 17 euros?

Se trata de un problema de tres etapas. Las dificultades detectadas en el problema 2 de la ficha 1 con el concepto de mitad nos han llevado a proponer este enunciado. Queremos trabajar los conceptos de doble y mitad y la relación entre ambos. Consideramos más adecuado trabajar primero el concepto de doble, asociándolo a la suma de dos conjuntos idénticos y a la tabla de multiplicar del 2, y en la ficha 3 trabajar el concepto de mitad: a partir de un conjunto, obtener dos grupos de elementos iguales.

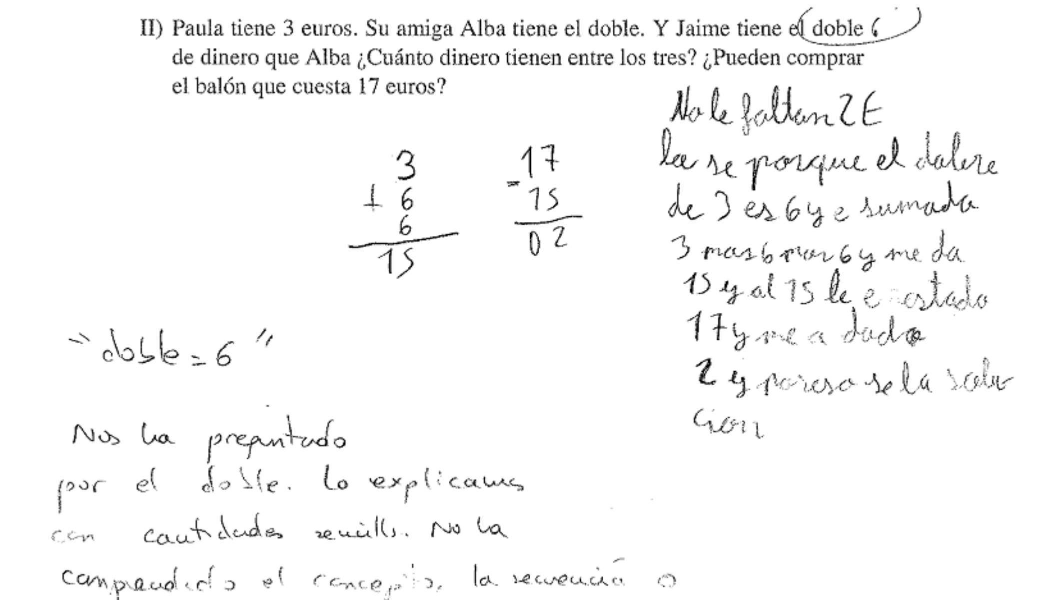
Las cantidades utilizadas en el problema son pequeñas para que el alumno pueda representarlo mental y gráficamente sin dificultad. Por el contrario en el currículo oficial están trabajando la suma y resta de números de cinco cifras que ellos no pueden representarse mentalmente.

Contamos con el trabajo de 29 alumnos: once lo han resuelto correctamente ($37{,}9\,\%$), cinco lo han dejado en blanco ($17{,}2\,\%$) y 13 alumnos han cometido uno o varios errores ($44{,}8\,\%$). Varios alumnos pidieron ayuda pues no comprendían «tiene el doble de» y algunos supieron resolver el problema después de la explicación. En total son doce los alumnos que han tenido problemas con este concepto. La figura 3.24 muestra algunos de estos casos.

Estrategias observadas

Este no es un problema que se preste a ser abordado desde estrategias diferentes. En este punto podemos observar más bien de qué herramientas matemáticas se valen para solucionarlo, si prestan atención a la secuencia del problema y si son organizados al transformarla. Este es el caso de los alumnos de la figura 3.25 y 3.26. El alumno 3A-2 hace las operaciones aritméticas necesarias para llegar a la solución. Sólo cuando se le pide que explique su trabajo atribuye cada una de estas cantidades a los protagonistas del problema y se vale de las flechas para explicar de forma esquemática. Mientras que el alumno 3C-9 procede igual pero al no identificar las cantidades parciales que va obteniendo (datos descontextualizados) se equivoca en los términos que debe llevar a la suma final.

Alumno 3A-11



II) Paula tiene 3 euros. Su amiga Alba tiene el doble. Y Jaime tiene el doble 6 de dinero que Alba ¿Cuánto dinero tienen entre los tres? ¿Pueden comprar el balón que cuesta 17 euros?

$3 + 6 + 6 = 15$

$17 - 15 = 02$

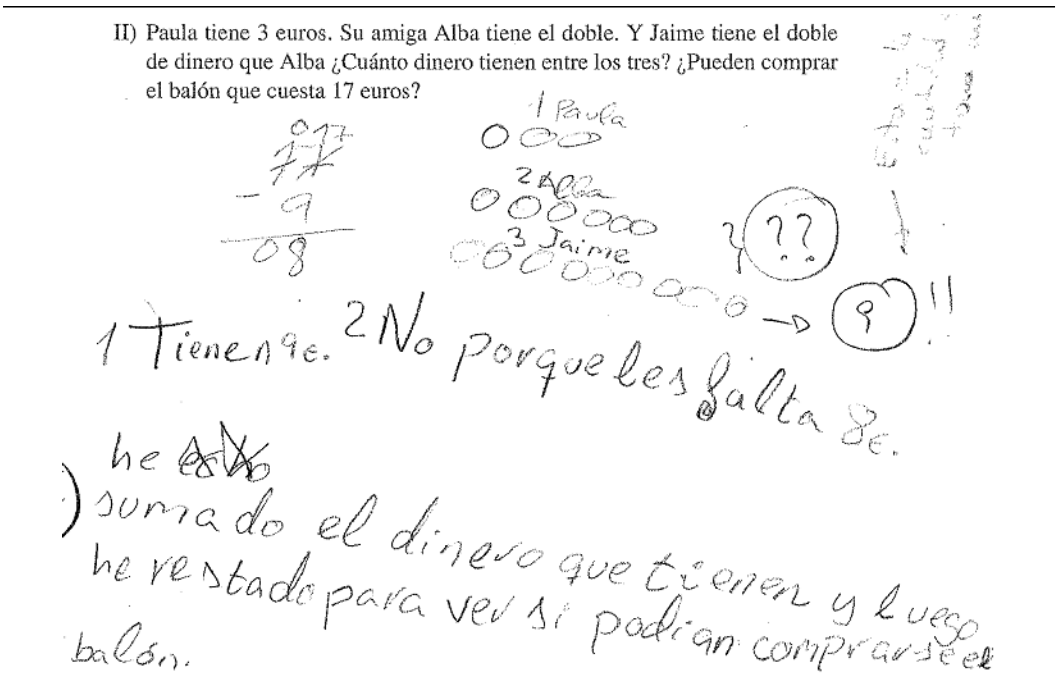
"doble = 6"

No le faltan 2E

lo se porque el doble de 3 es 6 y e sumado 3 mas 6 mas 6 y me da 15 y al 15 le e restado 17 y me a dado 2 y por eso se la solucion

Nos ha preguntado por el doble. Lo explicamos con cantidades sencillas. No ha comprendido el concepto, la secuencia o

Alumno 3A-7



II) Paula tiene 3 euros. Su amiga Alba tiene el doble. Y Jaime tiene el doble de dinero que Alba ¿Cuánto dinero tienen entre los tres? ¿Pueden comprar el balón que cuesta 17 euros?

$17 - 9 = 08$

1 Paula

2 Alba

3 Jaime

??

9 !!

1 Tienen 9e. 2 No porque les falta 8e.

he ~~esto~~ sumado el dinero que tienen y luego he restado para ver si podian comprarse el balón.

Figura 3.24: Ficha 2. Problema 2. Errores de comprensión del concepto «doble de».

Alumno 3A-2

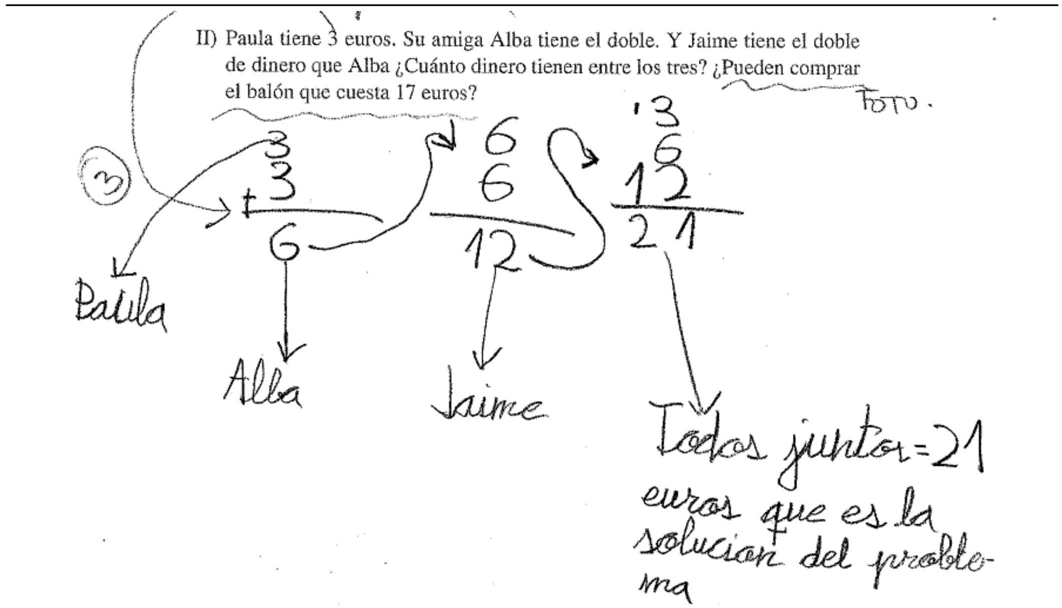

II) Paula tiene 3 euros. Su amiga Alba tiene el doble. Y Jaime tiene el doble de dinero que Alba ¿Cuánto dinero tienen entre los tres? ¿Pueden comprar el balón que cuesta 17 euros?

Foto.

3

$$\begin{array}{r} 3 \\ +\,3 \\ \hline 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6 \\ 6 \\ \hline 12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \\ 6 \\ 12 \\ \hline 21 \end{array}$$

Paula

Alba

Jaime

Todos juntos = 21 euros que es la solucion del proble-ma

Alumno 3C-9

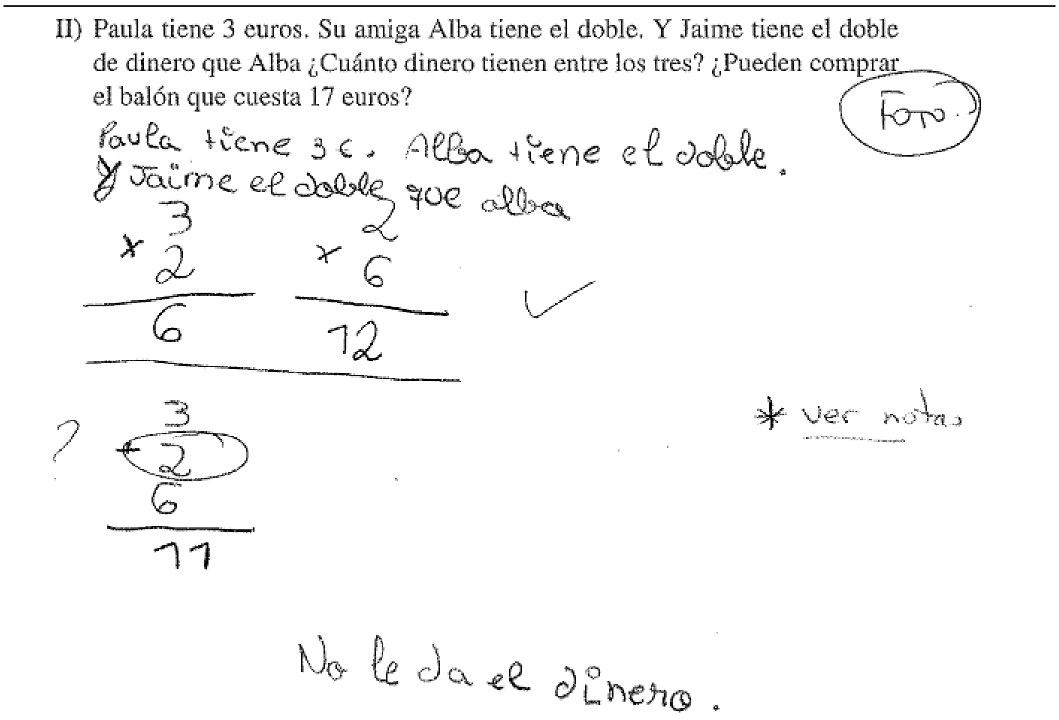

II) Paula tiene 3 euros. Su amiga Alba tiene el doble. Y Jaime tiene el doble de dinero que Alba ¿Cuánto dinero tienen entre los tres? ¿Pueden comprar el balón que cuesta 17 euros?

Foto.

Paula tiene 3 €. Alba tiene el doble.
Y Jaime el doble que alba

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times\,2 \\ \hline 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ \times\,6 \\ \hline 12 \end{array}$$

* ver notas

?

$$\begin{array}{r} 3 \\ +\,2 \\ 6 \\ \hline 11 \end{array}$$

No le da el dinero.

Figura 3.25: Ficha 2. Problema 2. Organización del espacio y forma de trabajo.

Alumno 3A-13

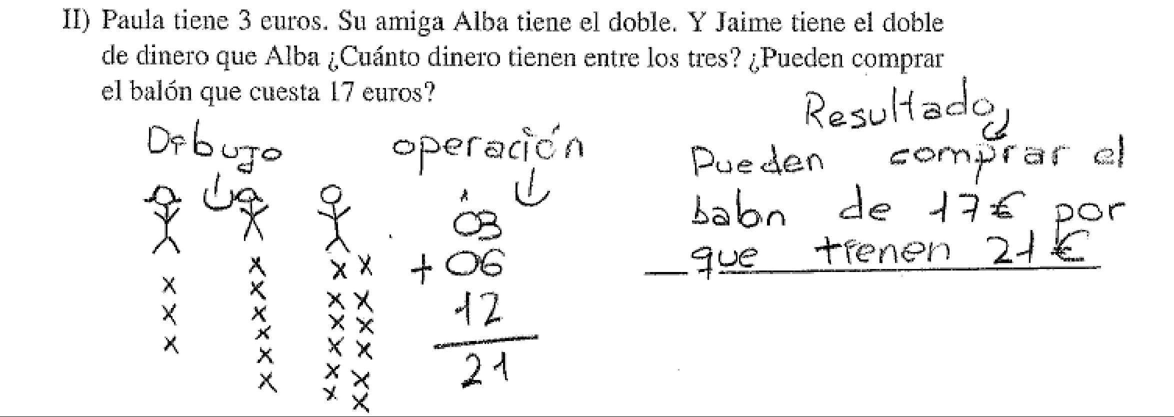


Figura 3.26: Ficha 2. Problema 2. Representación icónica de los datos.

A continuación enumeramos con detalle las estrategias observadas:

- Cuatro alumnos determinan las cantidades parciales haciendo uso de cálculo mental. Tres de ellos resuelven el problema correctamente, mientras que el alumno restante no entiende el concepto de doble.

- Dos alumnos plantean un dibujo y por conteo calculan estas cantidades parciales.

- Nueve alumnos hacen uso de la multiplicación, cuatro de ellos no llegan a resolver el problema correctamente pues no organizan la información de forma adecuada.

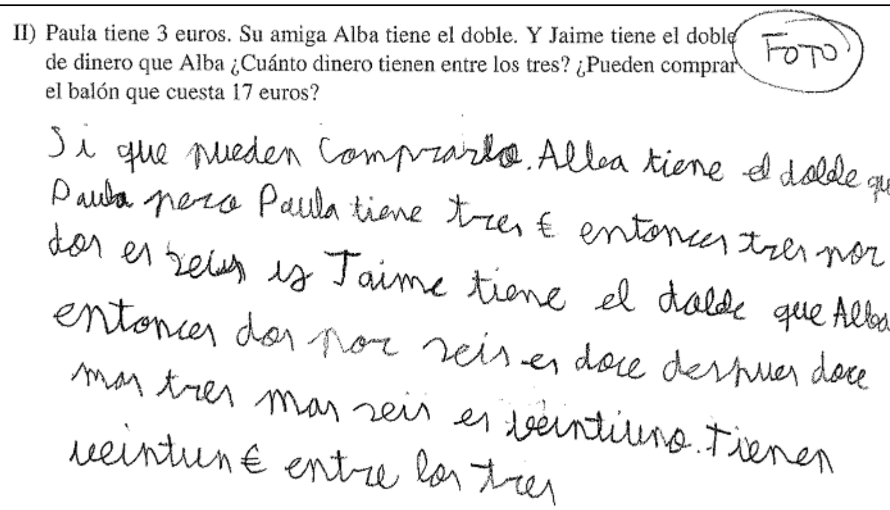
- Cinco alumnos calculan las cantidades parciales a partir de sumas, pero solo dos lo resuelven correctamente. De los tres restantes, dos de ellos no comprenden el concepto de doble y el otro utiliza lenguaje verbal narrativo y se pierde en la secuencia de operaciones (figura 3.27).

Representaciones utilizadas

- Seis alumnos hacen uso de representaciones icónicas para determinar la cantidad de euros que tiene cada uno de ellos. Tres de ellos no resuelven el problema correctamente pues no entienden el concepto de doble (figura 3.26).

- 19 alumnos plantean directamente las operaciones, la mayoría de ellos no identifican el propietario de la cantidad final y esto les lleva a no concluir con éxito el problema. Ninguno de ellos escribe las unidades en el resultado final.
- Cuatro alumnos hacen uso del lenguaje verbal para narrar todo el proceso. Solo dos de ellos concluyen con éxito (figura 3.27).

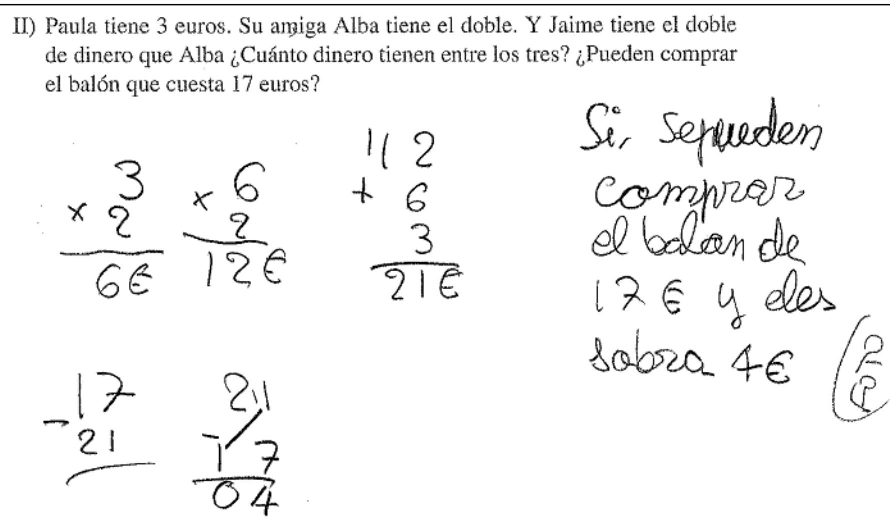
Alumno 3A-9


II) Paula tiene 3 euros. Su amiga Alba tiene el doble. Y Jaime tiene el doble de dinero que Alba ¿Cuánto dinero tienen entre los tres? ¿Pueden comprar el balón que cuesta 17 euros?

FOTO

Si que pueden Comprarlo. Allba tiene el dolde que Paula pero Paula tiene tres € entonces tres por dos es seis y Jaime tiene el dolde que Alba entonces dos por seis es doce despues doce mas tres mas seis es veintiuno. Tienen veintun € entre los tres

Alumno 3C-1


II) Paula tiene 3 euros. Su amiga Alba tiene el doble. Y Jaime tiene el doble de dinero que Alba ¿Cuánto dinero tienen entre los tres? ¿Pueden comprar el balón que cuesta 17 euros?

$3 \times 2 = 6€$ $\quad 6 \times 2 = 12€$ $\quad 12 + 6 + 3 = 21€$

$17 - 21$ $\quad 21 - 17 = 04$

Si, se pueden comprar el balon de 17 € y des sobra 4€

Figura 3.27: Ficha 2. Problema 2. Distintos tipos de representación y argumentación.

Modos de argumentación empleados

Doce alumnos hacen uso de argumentaciones implícitas: plantean sus operaciones sin dar más argumentos. De ellos, seis no elaboran una frase solución. El resto utiliza lenguaje verbal para explicitar sus planteamientos, sean correctos o no.

Organización del trabajo y de la hoja de trabajo

En 15 alumnos se observa una organización del espacio, y dos de ellos dividen explícitamente el papel en datos-operaciones-resultado. Hay dos alumnos que copian literalmente el enunciado y tres que toman los datos descontextualizados, lo que les lleva a operar de manera irreflexiva. En este problema es importante organizar el espacio y tomar nota de los resultados parciales pues de lo contrario no consiguen trasladar correctamente estos resultados a la suma final, que es lo que le pasa a la mayoría de los alumnos que resuelven mal el problema.

Análisis de los errores detectados

Ya hemos comentado que hay 12 alumnos que muestran no entender el concepto de doble, cinco de ellos pidieron ayuda. Tomando unos cuantos lápices les mostramos cómo calcular el doble, tomando una cantidad igual de lapiceros a los que ya hemos seleccionado. Pero dos de estos alumnos interpretaron el doble como un concepto estático, identificando doble con seis y por tanto no iteran el proceso; la cantidad de dinero de Jaime también son seis euros.

Hay un alumno para el que calcular el doble es sumar 2 y para otros dos más equivale a sumar tres (estos alumnos utilizan un dibujo para calcular las cantidades parciales, como en el ejemplo de la figura 3.28).

Hay un alumno para el que no entendemos lo que ha planteado como solución y tres más que operan con los datos de manera arbitraria.

Para corregir este problema en todas la clases pedimos a un alumno que no resuelve bien el problema por no organizar adecuadamente los datos que saliera a la pizarra a contarnos su manera de resolverlo. En el aula A también pedimos al alumno 3A-2 que nos mostrara su proceso de resolución. En el aula B no se pudo corregir el problema ni se pudo trabajar el siguiente de la hoja; los alumnos tuvieron un examen parcial antes de la sesión de clase y dispusimos de algo menos de 30 minutos para la sesión. La agenda de este grupo no

Alumno 3A-6

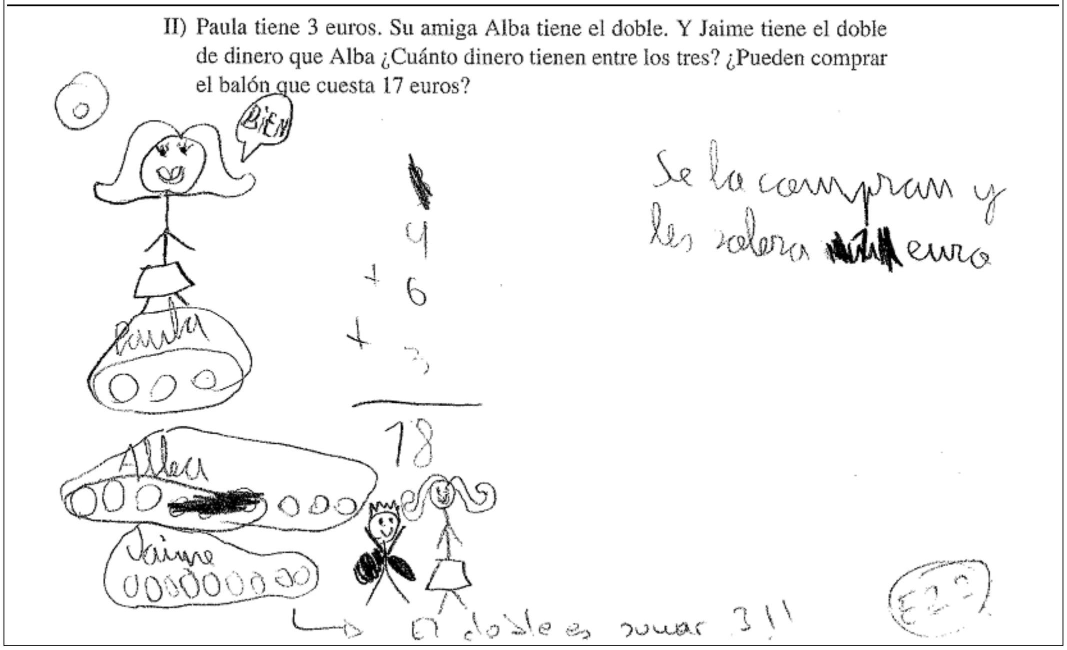


Figura 3.28: Ficha 2. Problema 2. Error de comprensión del concepto «doble de».

nos permitió volver sobre estos problemas.

Al corregir el problema con ellos enfatizamos los aspectos de doble y mitad, tal y como nos habíamos propuesto.

Ficha 2 – Problema 3

Roberto se gastó la mitad de su dinero en comprarse un balón. Si tiene 7 euros, ¿cuánto dinero tenía al principio?

Este problema es una versión más sencilla del problema 2 de la ficha 1. Retomamos el cálculo de la mitad de una cantidad desconocida para relacionar doble y mitad.

Varios alumnos preguntaron por el precio del balón, en tanto que cinco alumnos optaron por elegir el precio de los problemas anteriores, «es que lo dice aquí, el balón cuesta 17 euros». Al diseñar la ficha no nos habíamos planteado esta posibilidad.

El problema no ha resultado fácil, solo ocho de los 29 alumnos que lo han trabajado lo

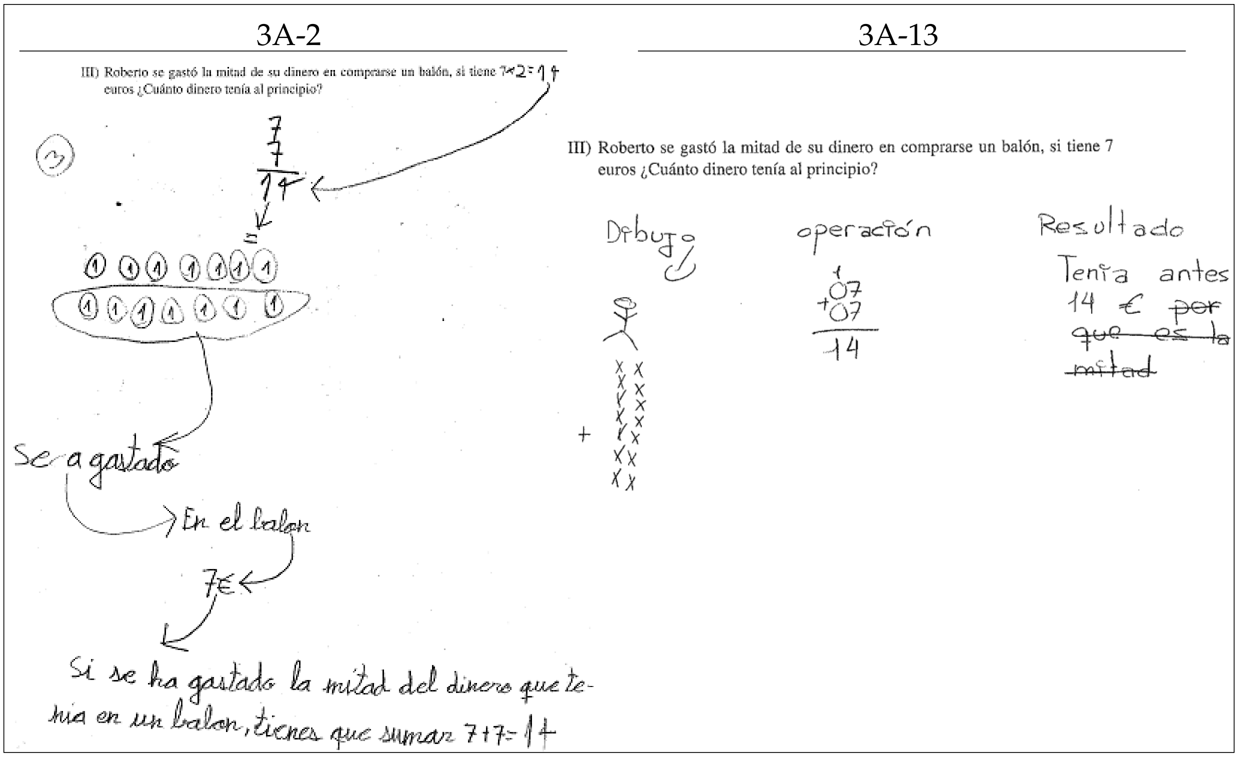


Figura 3.29: Ficha 2. Problema 3. Diferentes representaciones para resolver el problema.

resuelven correctamente (27,6 %), 12 alumnos dejan el espacio en blanco (41,4 %) y nueve alumnos lo resuelven mal (31,0 %). Hay cuatro alumnos que escriben en el espacio reservado para la resolución «no entiendo el problema».

Solo dos niños, figura 3.29, han utilizado un dibujo, el alumno 3A-2 una vez más para explicar su trabajo y el alumno 3A-13 para representar los datos del problema. En el caso del alumno 3A-2 podemos observar que mientras va leyendo el problema está respondiendo a la pregunta (la anotación que hace sobre el enunciado), después transforma esta respuesta en una suma y un dibujo para explicar su trabajo.

Tanto en el dibujo de 3A-2 como de 3A-13 se observa que han tenido en cuenta la línea de trabajo que hemos tomado en el problema anterior para explicar los conceptos doble-mitad. La mitad de un conjunto son dos subconjuntos con idéntica cantidad de elementos. Los otros seis alumnos han planteado la suma $7 + 7$.

Este problema sólo pudimos corregirlo en uno de los grupos y ante las dificultades observadas empezamos por recordar el problema ya trabajado en la ficha 1. Pedimos un alumno voluntario que salió a la pizarra a corregir el problema 2 de la ficha 1 (el alumno había resuelto correctamente ambos problemas, le preguntamos si recordaba el problema de la ficha anterior y con mucha seguridad nos dijo que sí). A la vez que el alumno explicaba su solución nosotros enfatizabamos lo que él iba escribiendo en la pizarra: «esta es mi hucha, tomo la mitad y me la gasto en un libro. No sé cuánto me ha costado el libro, no tengo el precio, sé que es la mitad de lo que tenía pero sí tengo información sobre la otra mitad: gasto 2 euros en chuches y me sobran 5 euros». Al terminar hay ya algunos alumnos que exclaman «¡Ah qué fácil!» refiriéndose al problema de esta ficha.

No disponemos de tiempo suficiente para seguir trabajando la ficha. La maestra nos propone volver a trabajar antes de la siguiente sesión esta ficha de nuevo, pues considera necesario repasarla en su conjunto. Los resultados del trabajo en esta segunda ocasión son más esperanzadores no tanto porque haya más alumnos que resuelven correctamente los tres problemas (14 de 17 en el primer problema, 10 de 17 para el segundo y tercer problema) sino porque se observa que ponen más cuidado en explicarse. En la figura 3.30 podemos observar el trabajo de dos alumnos diferentes para los problemas 1 y 3 de la ficha en las dos ocasiones en las que se ha trabajado. En la imagen, la columna de la izquierda muestra el trabajo realizado en la primera ocasión y la columna de la derecha el trabajo de la segunda ocasión.

Actitudes observadas en el aula

En este apartado analizaremos los datos tomados en nuestra matriz de evaluación de actitudes. Contamos con las anotaciones tomadas a lo largo de las sesiones que han tenido lugar hasta ahora y las notas aportadas por las maestras del aula a lo largo de todo este periodo en las sesiones regulares de clase. Hemos podido observar que uno de los puntos fuertes de la intervención es que los alumnos se sienten motivados a intentar resolver los problemas pues cuentan con la oportunidad de poder explicar y discutir su trabajo. Mientras estaban trabajando en el problema se les ha ido animando en este sentido. También hemos observado que hay alumnos con falta de confianza en sí mismos y que cuando se les pide que expongan su trabajo, aunque su solución sea correcta dicen tenerlo mal o no saber hacerlo. No se ha vuelto a observar ningún alumno angustiado ante las hojas de problemas ni llorando como nos sucedió en la primera sesión.

Las notas tomadas durante las observaciones se han traducido en primer lugar a una matriz de ceros y unos que nos permite obtener una representación gráfica de la situación. El fondo de escala se ha normalizado a dos puntos para todos los aspectos observados y estos puntos se han repartido equitativamente entre los descriptores que corresponden a

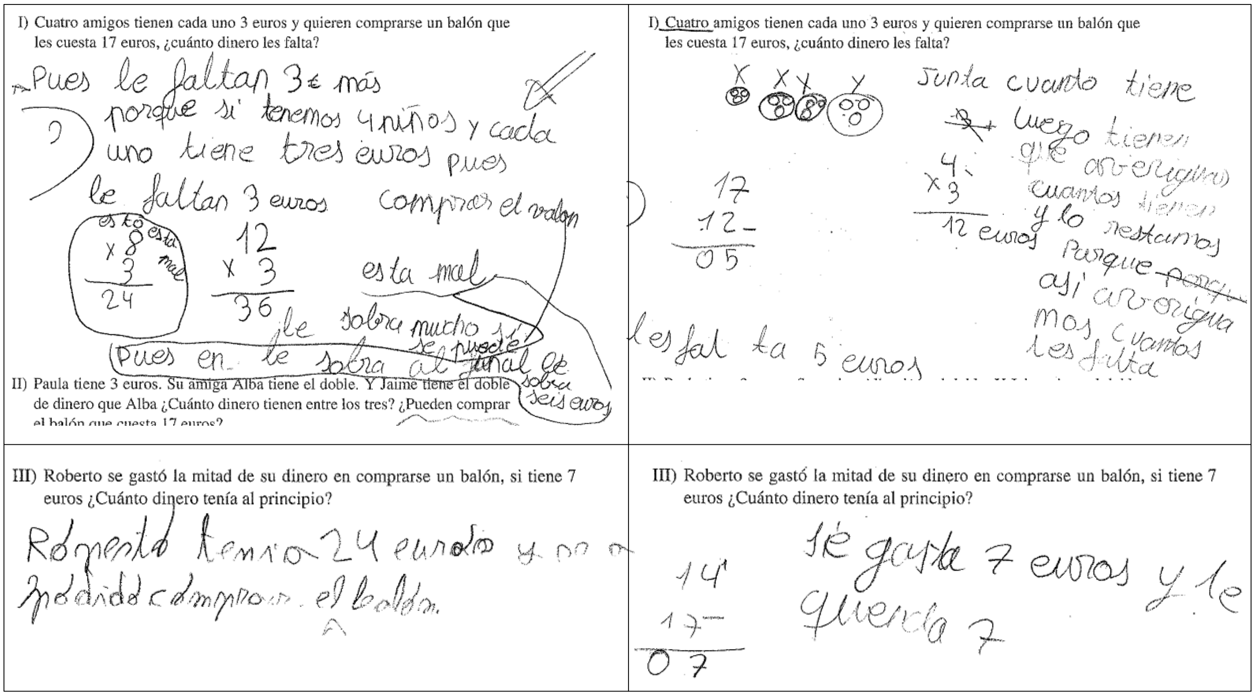


Figura 3.30: Ficha 2. Problemas 1 y 3. Trabajo de dos alumnos en las dos ocasiones que se ha trabajado la ficha 2.

cada aspecto. En la figura 3.31 mostramos la situación inicial de las aulas A y C (es en estas aulas en las que hemos podido disponer de las evaluaciones y comentarios pormenorizados de las tutoras, por lo que consideramos esta información suficientemente contrastada y completa).

En la clase C parece que debemos centrarnos en trabajar la perseverancia y el trabajo tranquilo (reflexivo), en el sentido de poner cuidado en razonar lo que estoy haciendo y en proporcionarme explicaciones o contarme a mí mismo lo que estoy haciendo y el porqué y no tener prisas por ser el primero en acabar y pasar a otra cosa. En cambio, en el aula A los alumnos se muestran menos receptivos a escuchar soluciones o planteamientos alternativos a los suyos y parecen estar disfrutando menos con las actividades de resolución de problemas (en esta matriz estamos integrando las actitudes observadas durante la intervención con las que observan las maestras en el día a día). En estas dos aulas las maestras están trabajando durante las horas de clase hojas de problemas alternativos a los del libro de texto. Además, en el aula C se está siguiendo la técnica de corrección en grupo ya implementada en las sesiones mientras que en el aula A la maestra recoge las fichas y las corrige y evalúa ella, por lo que no se le da al alumno la oportunidad de corregir las

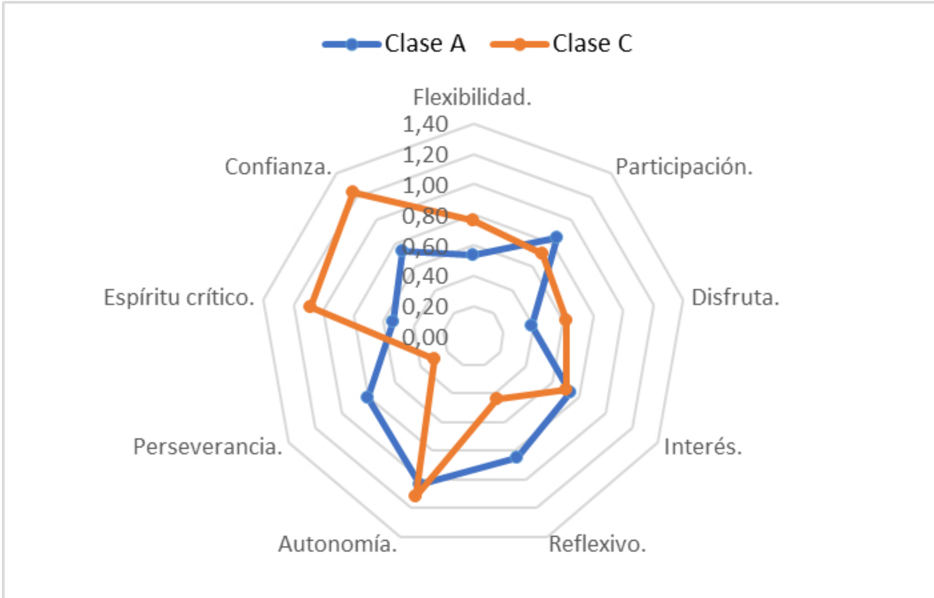


Figura 3.31: Representación gráfica del estado inicial de la matriz de actitudes.

actividades en grupo.

A continuación señalamos comportamientos concretos para ilustrar la forma de proceder con nuestras observaciones y cómo a partir de ellas elaboramos el gráfico radial de la figura 3.31.

1. Flexibilidad

- Se interesa por las otras formas de resolver que proponen sus compañeros (1 punto). Este descriptor nos ha permitido observar dos comportamientos muy diferentes entre los alumnos, y en concreto entre los alumnos menos flexibles que son aquellos a los que no se les ha otorgado ningún punto. Encontramos en este grupo por un lado aquellos alumnos muy seguros de sus capacidades y que han resuelto bien el problema y no les interesa saber otras formas de afrontarlos. Se trata de alumnos menos dispuestos a trabajar y compartir si no es para imponer su forma de resolver el problema pero que sí están dispuestos a mostrar su solución y hasta muestran gesto de disgusto si no se les da la palabra. Por otro lado, vemos alumnos que no saben resolver el problema, y que una vez que se les aporta una solución ya no están interesados en conocer otras. Entre los alumnos que sí muestran interés por la forma en la que han resuelto el problema otros compañeros se puede observar que, una vez analizadas las propuestas, escogen una de ellas.

- Cambia de opinión cuando se le aportan argumentos convincentes (1 punto). Encontramos aquí alumnos que, aunque no tienen bien resuelto el problema, como no terminan de comprender por qué su planteamiento o argumentación son erróneas, no aceptan los argumentos aportados por otros compañeros, o no los comprenden. Cuando es la maestra o la investigadora quienes les aportan estos argumentos los aceptan pero en base al principio de autoridad. No nos parece que sea debido a que comprenden finalmente el problema y el error que estaban cometiendo. Tenemos alumnos cuya actitud la denotamos como «sí, pero no» que suelen contestar a su compañero con un «bueno vale» pero en cuanto corregimos en grupo aportan su planteamiento o procedimiento olvidando el que ya habían adoptado.

El gráfico nos muestra que este es uno de los aspectos que hay que mejorar en las dos las aulas.

2. Confianza en sus propias capacidades

- Muestra confianza en sus argumentaciones y las defiende aunque se le expongan de forma convincente otros argumentos diferentes a los suyos (1 punto). Este descriptor hace referencia al proceso en sí mismo, a lo sucedido mientras trabajan. Tenemos alumnos que aun avanzando por el camino erróneo no se paran a plantearse el porqué de las preguntas que les planteamos cuando les pedimos que nos expliquen su forma de proceder; se sienten convencidos de que su planteamiento es el adecuado y se muestran orgullosos de sus habilidades; valoramos esta actitud como positiva en tanto en cuanto refleja confianza en sus propias capacidades. Por el contrario, aquellos a los que les otorgamos 0 puntos se muestran temerosos a responder y explicar lo que están haciendo y tienen la goma de borrar a mano dispuesta para eliminar lo que tienen escrito (a pesar de que se insiste en que no borren lo que consideren que no es correcto).
- Están convencidos de que su solución es la correcta, de que resuelven bien este tipo de tareas (1 punto). Este descriptor hace referencia al final del proceso. Algunos de los alumnos que muestran esta actitud están menos interesados en conocer otras formas de proceder, incluso cuando han comprobado que no estaban en lo cierto.

En este comportamiento influye la «historia acumulada». En todas las clases se observa que los roles de buen resolutor y mal resolutor ya están establecidos. Y entre aquellos alumnos que se sienten como «malos resolutores» se percibe una mayor falta de confianza. También se observa una actitud de confianza en uno mismo entre los alumnos que «quieren hacerse un hueco», que están luchando contra la situación preestablecida, quieren hacerse escuchar y hacer ver que ellos también pueden resolver correctamente el problema o aportar soluciones.

3. Espíritu crítico

- Se da cuenta de que no llega a una solución o de que la que ha obtenido no es correcta y se preocupa de saber por qué (1 punto). Este comportamiento se manifiesta durante el proceso de resolución, bien por iniciativa propia, bien cuando les planteamos una pregunta que les hace reflexionar sobre el sentido de lo que está haciendo.
- Analiza la solución obtenida (1 punto). Revisa la solución obtenida para comprobar que tiene sentido y que está respondiendo a la pregunta formulada.

4. Perseverancia

- No se da por vencido ni abandona la tarea sin llegar a una respuesta (1 punto). Resuelta más fácil de observar la actitud contraria: son los alumnos que se observa que tras un primer intento sin éxito pasan a otro problema, después a otro y al final preguntan si pueden hacer un dibujo o colorear, o se ponen a hablar con el compañero. Estos casos se han calificado con 0 puntos.
- No quiere que se le retire la hoja de trabajo si considera que puede terminarlo o completarlo mejor. Algunos de estos alumnos lo que no toleran es dejar el espacio sin respuesta o dejar inconcluso aquello que estaban haciendo. Son los que siempre piden más tiempo antes de empezar a corregir. En estas situaciones se ha adjudicado un 1 punto cuando tenemos constancia de que está centrado en la tarea y cero en caso contrario.

La actitud de perseverancia no está necesariamente ligada a la de autonomía, pues hay alumnos muy perseverantes que requieren la ayuda de la maestra o la investigadora o de los compañeros continuamente, van preguntado para pedir pistas o pequeñas ayudas pero quieren seguir intentándolo.

5. Autonomía

- Si observamos que el alumno pregunta constantemente a la maestra o la investigadora sobre lo que tiene que hacer o espera a ver la solución de los compañeros, no se le adjudica ningún punto. Por el contrario, se le adjudica un punto si intenta tras una primera lectura o aproximación infructuosa al problema trabajar algo por su cuenta bien porque es consciente de que su forma de proceder es errónea o bien porque ha solicitado ayuda al profesor y sigue trabajando a partir de la pista proporcionada.

- Se adjudica un punto si trabaja de modo autónomo y sólo en caso de duda o de encontrar dificultades recurre al profesor o a los compañeros.

6. Actitud reflexiva

Obtiene un punto si se observa que trabaja con calma, de forma reflexiva, razonando su procedimiento de resolución; su objetivo no es terminar cuanto antes.

7. Interés

Se califica también con un punto si durante las clases está centrado e interesado en el trabajo.

8. Disfrute

Cuando se observa que el alumno disfruta con el trabajo que está haciendo le adjudicamos 1 punto. El ambiente en las clases es distendido y los alumnos muestran con naturalidad su estado de ánimo y preferencias, es en base a estas observaciones y las preguntas directas como hemos valorado este aspecto.

9. Grado de participación

Es participativo, quiere salir a la pizarra, quiere dar su opinión, está dispuesto a contestar, etc. En estos casos se adjudica un punto. Hemos consultado con las maestras quienes son los niños más introvertidos y vergonzosos y a estos les hemos pedido que nos hicieran sus comentarios sin hacerles salir a la pizarra pues en algunas ocasiones cuando se les ha pedido que salieran se han negado. En ningún caso les hemos forzado a hacerlo, hemos intentado recoger sus comentarios mientras estaban trabajando en el problema o bien a nivel individual o en pequeños grupos.

Tabla 3.3: Resumen de respuestas de los problemas de la ficha 2.

	Número de respuestas	Correctas	Incorrectas	En blanco
Problema 1	29	18	11	0
Problema 2	29	11	13	5
Problema 3	29	8	12	9

Fuente: elaboración propia.

7.3. Primeras conclusiones de esta sesión. Acciones para la siguiente sesión

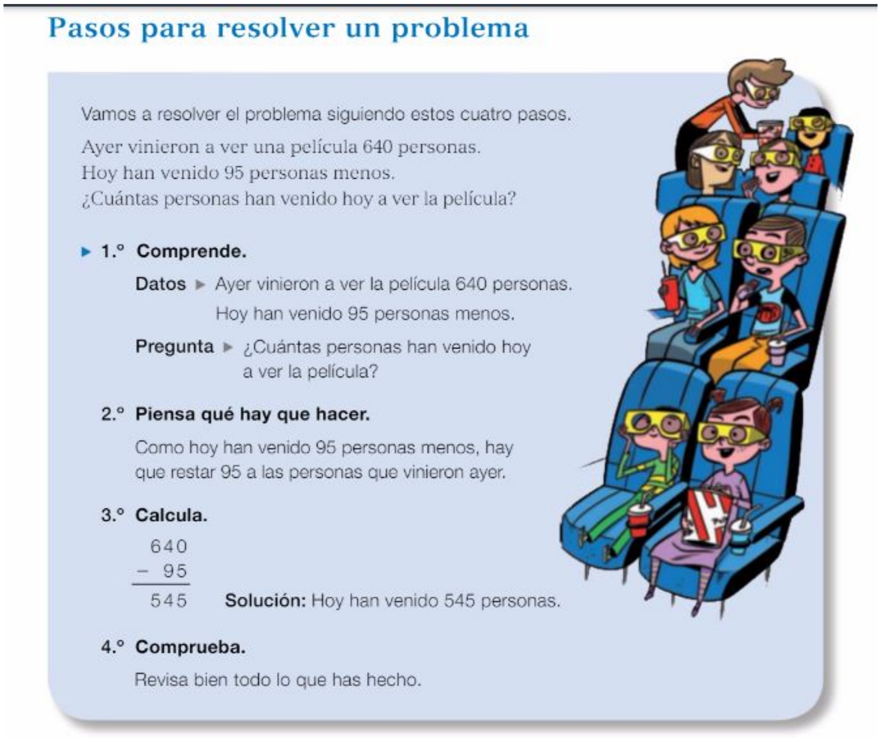
La tabla 3.3 nos muestra el resumen de resultados para esta ficha. Los problemas no son estándar para este nivel y han sido retos cognitivos para ellos. La figura 3.33 nos muestra ejemplos de los problemas planteados en el libro de texto y trabajados en clase en paralelo a la intervención.

Es difícil romper con la inercia establecida; la intervención está planteando formas de trabajo distintas a las más comunes en las sesiones normales de clase. Por ejemplo:

- No les estamos pidiendo que sigan unos pasos determinados para resolver los problemas. En cambio, en todas las sesiones normales de clase se sigue la pauta establecida en el libro de texto que se muestra en la figura 3.32. Estamos huyendo de preguntas como la planteada en el libro de texto de la figura 3.33: «¿qué operación hay que hacer para resolver cada problema?»

- No les estamos pidiendo que organicen el espacio en datos-operaciones-resultados. Estamos analizando esta forma de proceder en los alumnos pues queremos estudiar hasta qué punto esta pauta es beneficiosa para ellos o no y cómo se sienten de limitados por ella. Por el momento podemos decir que tan pronto se les libera de la obligación de organizar el espacio de una forma tan pautada parecen que dejan de hacerlo pero no podemos confirmar si esto es positivo o negativo en estos momentos.

- Estamos insistiendo en que ha de contarse la historia que plantea el problema y hacer un buen dibujo que les ayude a resolverlo. Hay alumnos que se están iniciando en ello, como el autor del trabajo que se muestra en la figura 3.34. El alumno ha dibujado el ascensor en la posición de partida, la decimocuarta, y ha seguido las in-



Pasos para resolver un problema

Vamos a resolver el problema siguiendo estos cuatro pasos.

Ayer vinieron a ver una película 640 personas.
Hoy han venido 95 personas menos.
¿Cuántas personas han venido hoy a ver la película?

1.º Comprende.

Datos ▶ Ayer vinieron a ver la película 640 personas.
Hoy han venido 95 personas menos.

Pregunta ▶ ¿Cuántas personas han venido hoy a ver la película?

2.º Piensa qué hay que hacer.

Como hoy han venido 95 personas menos, hay que restar 95 a las personas que vinieron ayer.

3.º Calcula.

$$\begin{array}{r} 640 \\ -\ 95 \\ \hline 545 \end{array}$$

Solución: Hoy han venido 545 personas.

4.º Comprueba.

Revisa bien todo lo que has hecho.

Fuente: Saber Hacer 3.º de Primaria. Editorial Santillana (p. 14).

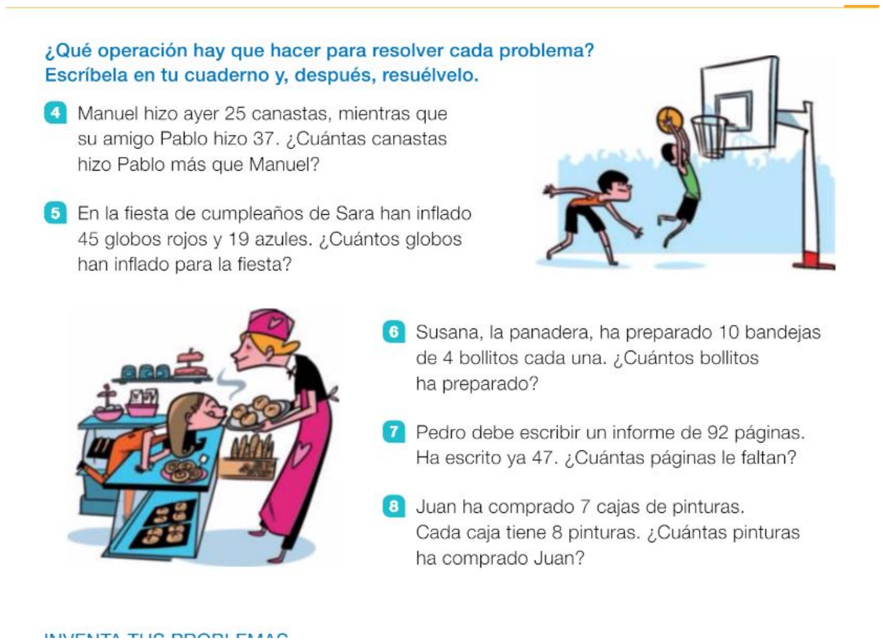
Figura 3.32: Pautas de resolución de problemas del libro de texto.

dicaciones del enunciado. Se equivoca al contar la posición final aunque coloca el ascensor correctamente (este mismo dibujo lo tiene hecho en el reverso de la última página del control que utilizan como hoja para cálculos). Su resolución nos parece acertada, aunque no está completa de acuerdo con los estándares de evaluación.

El alumno de la figura 3.35 se vale también de un dibujo que hace en el reverso de la última página del control, (en el espacio reservado para las cuentas y operaciones en borrador) y lo resuelve correctamente. Podemos observar que su problema es un problema de transformación, no sabe plasmar el trabajo realizado en una operación matemática.

En esta ocasión, la tipografía utilizada parece la adecuada. Ningún niño ha manifestado problemas para leer el enunciado.

No parece que podamos seguir con la dinámica de dejarles trabajar por su cuenta en función del orden que consideren oportuno e intentar corregir los problemas. No hay tiempo suficiente para ello.



¿Qué operación hay que hacer para resolver cada problema?
Escríbela en tu cuaderno y, después, resuélvelo.

4 Manuel hizo ayer 25 canastas, mientras que su amigo Pablo hizo 37. ¿Cuántas canastas hizo Pablo más que Manuel?

5 En la fiesta de cumpleaños de Sara han inflado 45 globos rojos y 19 azules. ¿Cuántos globos han inflado para la fiesta?

6 Susana, la panadera, ha preparado 10 bandejas de 4 bollitos cada una. ¿Cuántos bollitos ha preparado?

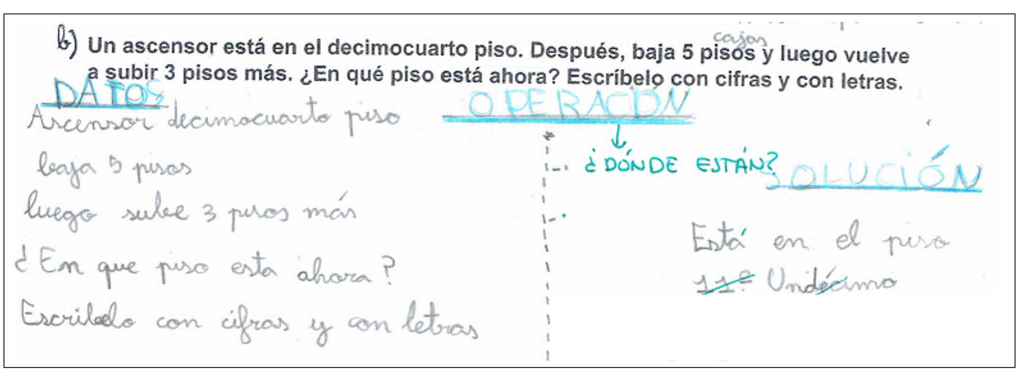
7 Pedro debe escribir un informe de 92 páginas. Ha escrito ya 47. ¿Cuántas páginas le faltan?

8 Juan ha comprado 7 cajas de pinturas. Cada caja tiene 8 pinturas. ¿Cuántas pinturas ha comprado Juan?

Fuente: Saber Hacer 3.º de Primaria. Editorial Santillana (p. 15).

Figura 3.33: Ejemplos de problemas planteados en el libro de texto.

La dinámica preestablecida para las sesiones no se puede materializar por falta de tiempo. Los problemas están resultando laboriosos y difíciles para los niños y por tanto avanzamos muy despacio. Primamos la compresión y la escucha de los alumnos sobre el número de problemas trabajados. Consideramos más formativo trabajar cada problema a fondo y debatirlo con los alumnos que el trabajo más superficial sobre una cantidad mayor de problemas.



b) Un ascensor está en el decimocuarto piso. Después, baja 5 pisos (cajon) y luego vuelve a subir 3 pisos más. ¿En qué piso está ahora? Escríbelo con cifras y con letras.

DATOS
Ascensor decimocuarto piso
baja 5 pisos
luego sube 3 pisos más
¿En que piso esta ahora?
Escribelo con cifras y con letras

OPERACION
¿DÓNDE ESTÁN?

SOLUCIÓN
Está en el piso
~~11º~~ Undécimo

Figura 3.34: Resolución gráfica del problema planteado en la prueba de evaluación.

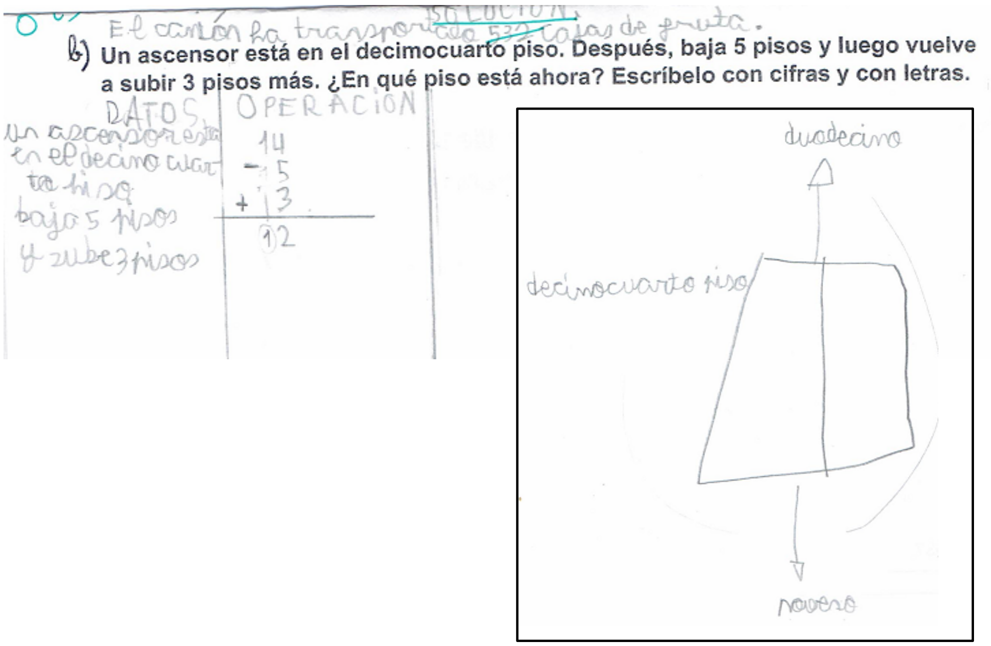


Figura 3.35: Ejemplo de problema de una prueba de evaluación con error de transformación.

La actitud de los niños es positiva. Intentan realmente trabajar los problemas y participan muy activamente en la solución.

Debemos insistir en:

- Todo problema cuenta una historia, antes de pasar a la acción me cuento la historia con mis propias palabras.
- Los problemas me piden «hacer algo», primero pienso en la secuencia de lo que quiero hacer e intento escribirlo en el papel (cuando salen a la pizarra les pedimos que nos lo expliquen).
- Intentaré hacer un buen dibujo para resolver el problema.
- Al terminar el problema compruebo si la solución obtenida puede ser una buena respuesta para el problema o no.
- Redacto una frase con la solución.

Todos estos pasos los escenificamos cada vez que corregimos un problema, pero no parece suficiente. Optamos por preparar una breve lista de control que repasaremos con ellos a modo de autoevaluación sobre el proceso de trabajo. En la práctica, estamos recurriendo a la adquisición de hábitos (no técnicas), por repetición sucesiva. Intentamos que incorporen a su rutina de trabajo estas formas de proceder pero en ningún momento intentaremos mecanizar los procesos. Se trata de modelizar con ellos las habilidades ejecutivas que habíamos observado no tienen adquiridas o desarrolladas.

Las maestras nos han pedido material y actividades para practicar cálculo mental. Las dos próximas sesiones estarán dedicadas a este tema. La siguiente sesión de problemas no tendrá lugar hasta el mes de enero. Decidimos volver para profundizar sobre estos mismos conceptos.

8. Análisis de la ficha 3

Han transcurrido dos meses desde la última sesión de problemas. En las sesiones que han precedido a esta hemos trabajado cálculo mental a petición de las maestras del aula. Han resultado especialmente interesantes los problemas de lógica matemática con balanzas numéricas como la mostrada en la figura 3.36. Después de una sesión práctica dedicada a trabajar pautas de cálculo mental propusimos una hoja de problemas con seis balanzas, la primera de ellas la resolvimos en grupo para explicar la dinámica y después los alumnos trabajaron en parejas para resolver las cinco balanzas restantes. Solo tres parejas de alumnos llegan a resolver correctamente tres de las cinco balanzas. El resto ha resuelto correctamente una o dos balanzas como máximo. No terminan de comprender la situación de equilibrio, como puede observarse en la imagen. Volvemos sobre estos problemas en cuarto curso.

La ficha 3 tiene tres problemas similares a los de la ficha 2. Abordamos el análisis en los mismos términos que en las fichas anteriores a la par que comparamos con lo sucedido en la ficha 2.

Tenemos una breve lista que escribimos en la pizarra para revisar el proceso de resolución:

- Leo el problema y cuento su historia con mis propias palabras.
- Si no entiendo el problema, pido ayuda pero antes intento explicar qué es lo que no entiendo.

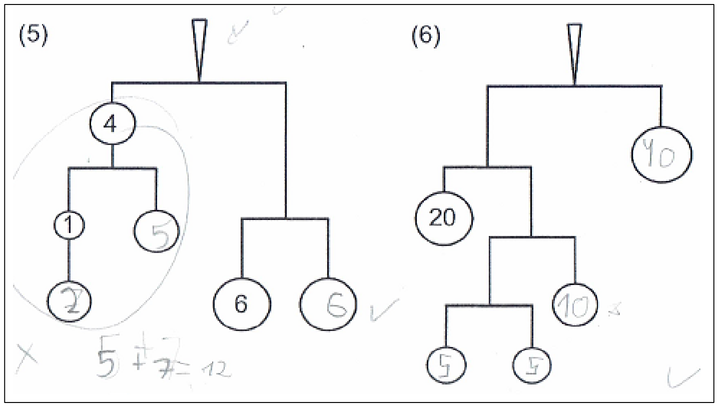


Figura 3.36: Problemas de razonamiento lógico-numérico.

- Pienso la secuencia de lo que voy a hacer de acuerdo con la historia que me cuenta el problema.
- Intento hacer un buen dibujo que me ayude a resolver el problema.
- Compruebo la solución que he obtenido y escribo una frase de respuesta.

Les pedimos que comprueben si han seguido todos estos pasos antes de dar por finalizado un problema y pasar al siguiente.

8.1. Ficha 3 – Problema 1

Cinco amigas tienen cada una 4 euros y compran entre todas un puzzle que les ha costado 16 euros. ¿Cuánto dinero les ha sobrado?

El problema lo han trabajado 47 alumnos: 25 lo han resuelto correctamente, uno lo ha dejado en blanco y encontramos fallos en el trabajo de 21 alumnos.

Su estructura es idéntica a la del problema 1 de la ficha 2 y la redacción es muy similar. En las aulas A y C, donde se había trabajado la ficha 2, hubo niños que reconocieron estas coincidencias y pensaron que se trataba de los mismos problemas: «estos ya los hemos hecho», I: «no, estos no. Has hecho algún problema muy parecido, pero estos no. Así es que ahora nos vamos a concentrar en hacer estos pensando en explicar el problema».

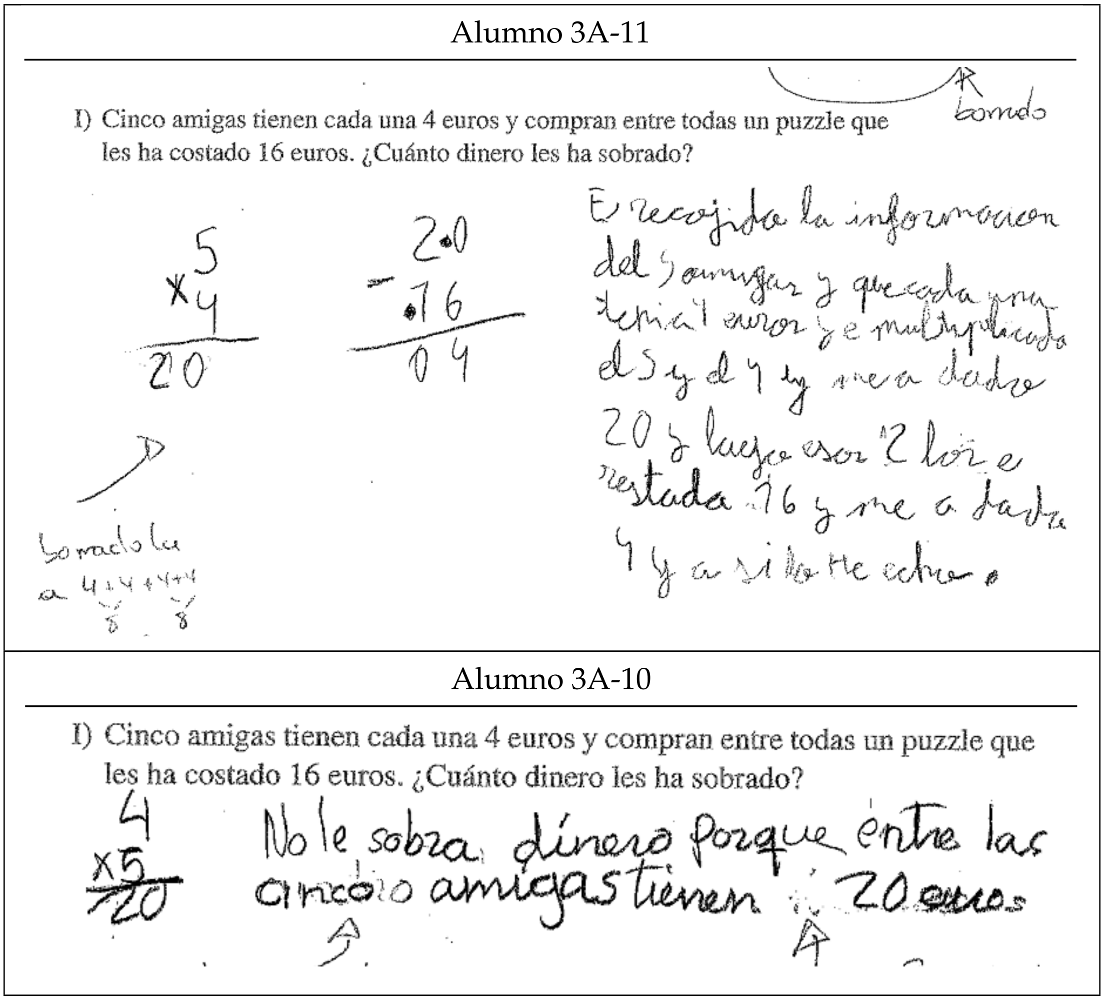
Estrategias observadas

Analizamos la secuencia de estrategias en los mismos términos que en la ficha 2:

- Cuatro niños optan por resolver la primera etapa mediante cálculo mental y todos ellos resuelven la segunda etapa a través de una resta. Solo uno de ellos lo ha resuelto correctamente. Este alumno es del aula C y ha resuelto el problema exactamente igual que lo hizo en la ficha 2. Al pedirles que pongan más atención en mostrar sus procesos de resolución pasan a explicar con detalle las operaciones aritméticas que han realizado.

- 20 niños optan por plantear una multiplicación para la primera etapa y, de estos, catorce plantean una resta para la segunda parte del problema. Todos lo resuelven correctamente salvo un alumno del grupo B.

- Los seis niños restantes no resuelven bien el problema, dos de ellos se han perdido en la narración de su proceso de resolución y olvidaron resolver la segunda parte; otros dos (ambos de la misma clase y compañeros de pupitre) han cometido distintos errores de cálculo y planteamiento; les pedimos que revisen conjuntamente sus soluciones y que salgan a la pizarra a resolver el problema. Antes de salir ya se han dado cuenta de sus respectivos errores y solo exponen la solución correcta (en la hoja nos han borrado el planteamiento inicial pero se adivina, como se puede comprobar en la figura 3.37).


Alumno 3A-11

I) Cinco amigas tienen cada una 4 euros y compran entre todas un puzzle que les ha costado 16 euros. ¿Cuánto dinero les ha sobrado?

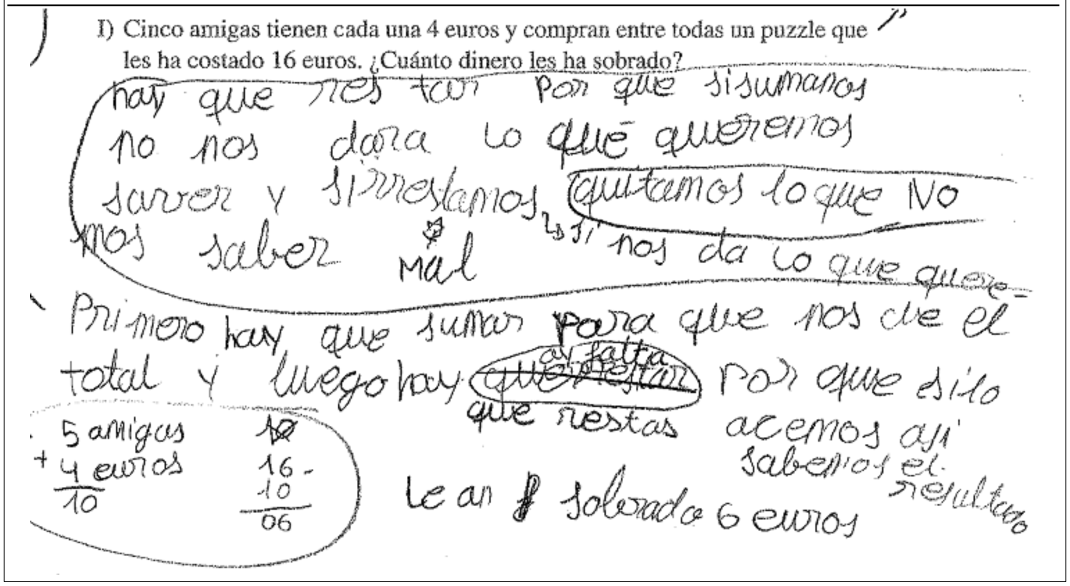
Alumno 3A-10

I) Cinco amigas tienen cada una 4 euros y compran entre todas un puzzle que les ha costado 16 euros. ¿Cuánto dinero les ha sobrado?

Figura 3.37: Ficha 3. Problema 1. Solución corregida por los alumnos.

- 12 niños resuelven la primera parte mediante una suma, cuatro resuelven la segunda parte mediante cálculo mental y el resto plantea una resta. Hay tres niños que no resuelven bien el problema y los tres ya lo habían trabajado en la ficha 2. Uno de ellos (figura 3.38) ha intentado resolverlo verbalmente pero el relato que articula es muy confuso.

Alumno 3C-7



I) Cinco amigas tienen cada una 4 euros y compran entre todas un puzzle que les ha costado 16 euros. ¿Cuánto dinero les ha sobrado?

hay que restar por que si sumamos
no nos dara lo que queremos
saver y si restamos quitamos lo que No
nos saber mal así nos da lo que quere-

Primero hay que sumar para que nos de el
total y luego hay ~~que restar~~ al falta por que si lo
que restas acemos así
sabemos el resultado

5 amigas
+ 4 euros
10

16 -
10
06

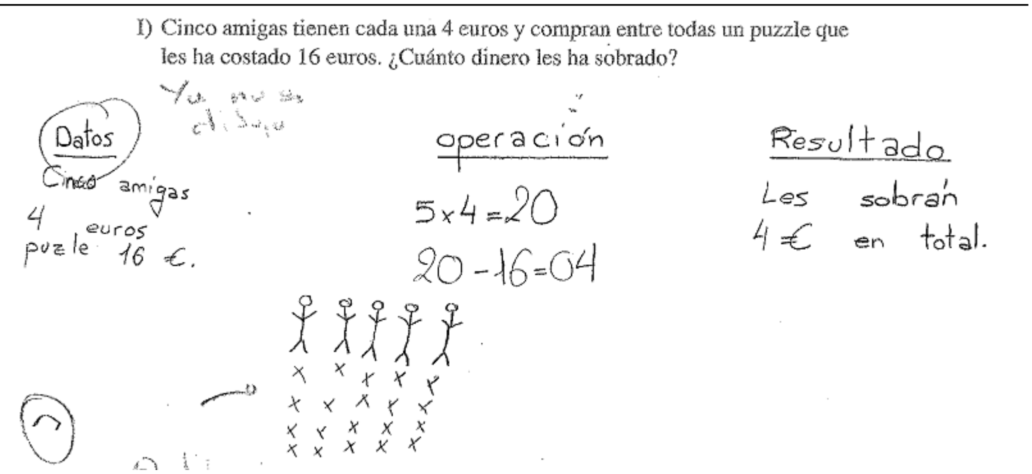
Le an sobrado 6 euros

Figura 3.38: Ficha 3. Problema 1. Intento de resolución verbal.

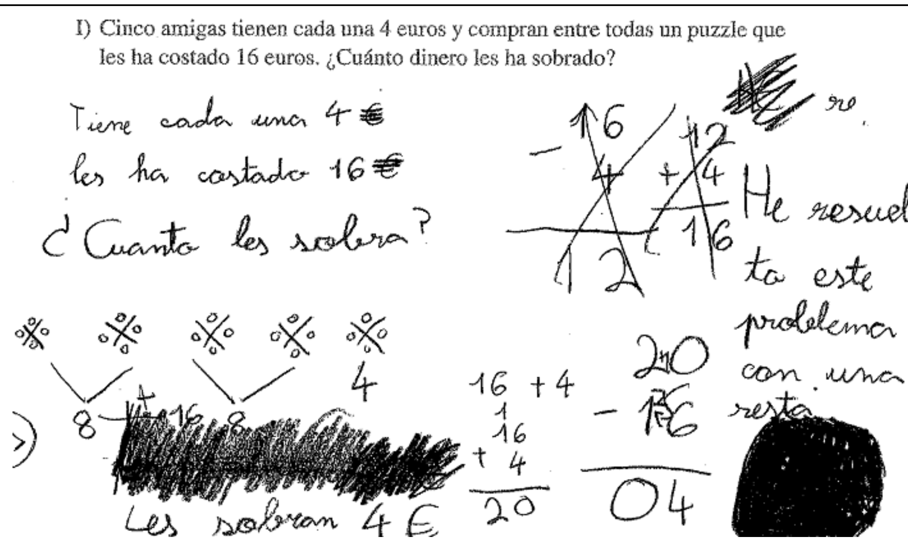
Representaciones utilizadas

- Hay 14 niños que hacen un dibujo (son claramente más que los que hemos obtenido hasta ahora y cuatro de ellos pertenecen al grupo B, que no había trabajado la ficha anterior). En tres de ellos los dibujos cumplen una función figurativa, no ayudan a la resolución; en otros tres funcionan como soporte para el cálculo de la primera fase y el resto representan los datos. En el caso del alumno 3C-11 de la figura 3.39, al pedirle que nos explique su trabajo, él mismo se da cuenta de que su solución no es correcta y pasa a hacer un dibujo, calcula sobre el dibujo la respuesta y después la traduce a operaciones.

Alumno 3A-13



Alumno 3C-11



Alumno 3B-11

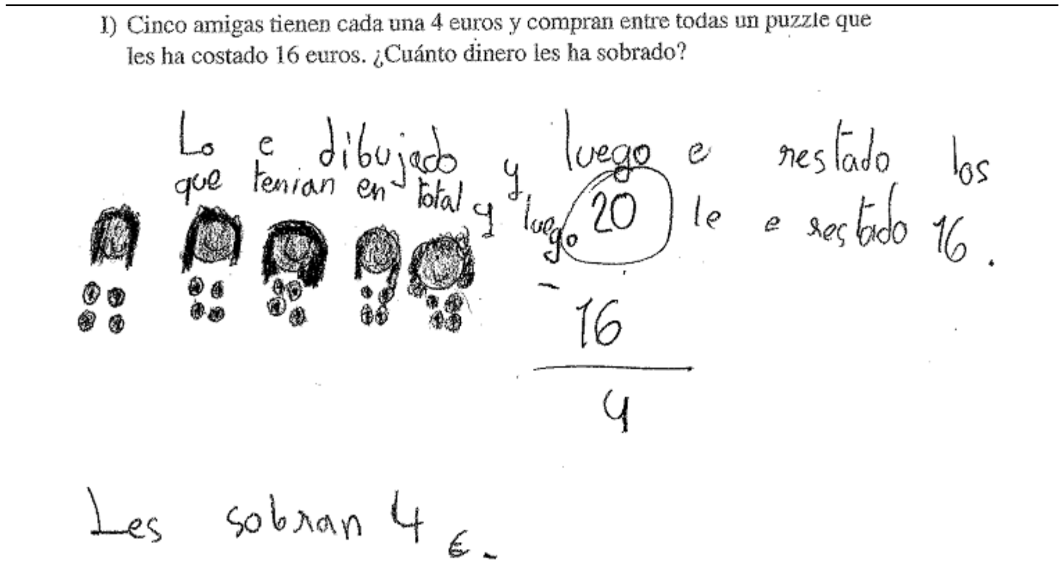


Figura 3.39: Ficha 3. Problema 1. Diferentes representaciones icónicas.

- 32 niños se valen de la respresentación simbólico-numérica de los cuales 24 ya habían trabajado el problema con anterioridad. Hemos observado que cuando se sienten más seguros sobre sus capacidades son más reacios a explicar y exponer con detalle su trabajo. Lo plasman de la forma más sintética posible. Pero aún así hay ocho alumnos que intentan narrar todo el proceso y resolver el problema verbalmente. Nos encontramos en la difícil situación de hacerles ver que es una buena explicación pero que no deben renunciar a las ventajas del lenguaje matemático. Por lo tanto, al corregir en grupo les pedimos que expliquen verbalmente todo el proceso y después les alentamos a escribirlo matemáticamente.

Modos de argumentación empleados

Hay 28 alumnos que hacen uso de una argumentación implícita (25 de ellos de carácter numérico). Ya hay 14 niños que explicitan con un grado de detalle satisfactorio su proceso de resolución, en la línea del alumno 3A-11 de la figura 3.37. No tenemos notas detalladas de estos 14 alumnos en el sentido de que solo para seis de ellos podemos afirmar que narraron su estrategia antes de pasar a ejecutarla.

El caso del alumno 3A-9 es alentador: en la ficha 1, este alumno supo resolver el problema oralmente y lo explicó correctamente haciendo uso de un dibujo en la pizarra. Su hoja, en cambio, estaba en blanco; no sabía cómo explicarlo. En la ficha 2 pasa a narrar literalmente lo que ha pensado y cómo solucionarlo; sin embargo, debido a lo confuso del relato que construye por la falta de destreza narrativa y a la falta de desarrollo psicomotor fino, pierde el hilo conductor y no llega a resolver el problema. En esta ocasión ya ha sabido compaginar ambos modos de expresión. Este tipo de evolución también se está observando en otros cinco alumnos de distintos grupos solo que son más reacios a plasmarlo por escrito: en general, hemos observado que solicitan la atención de la investigadora o la maestra para explicarnos oralmente el problema. Por otro lado es natural esta forma de actuar, se requiere menos esfuerzo y se obtiene retroalimentación inmediata por parte de la maestra.

Organización del trabajo y de la hoja de trabajo

Tenemos un total de 19 alumnos en los que no apreciamos indicios de haber organizado el espacio. Parece más bien que, respondiendo a su impulso ejecutor, plantean directamente la operación aritmética que consideran adecuada.

Hay 22 niños que toman nota de una u otra manera de los datos: doce organizan el espacio en datos-operaciones-resultado y, de estos, cinco copian literalmente el enunciado (seguimos sin explicarnos esta forma de actuar, sobre todo porque les observamos que están literalmente copiando, no parece que estén procesando información). Solo tres de estos cinco resuelven correctamente el problema. Otros cinco alumnos más toman nota de los datos numéricos de forma descontextualizada o incompleta. Ninguno de estos niños resuelve correctamente el problema. El resto o bien escribe una frase completa o parte de la misma. Por último, hay dos niños a los que hemos visto tomar nota de los datos explícitamente una vez que han resuelto el problema como ayuda para explicar su trabajo.

Análisis de los errores detectados

- Hay 13 alumnos que muestran no haber comprendido o haber omitido el término «cada» al tomar nota de los datos. Tres de estos alumnos plantean una operación sin sentido en este contexto: 16×4. Para el resto, el problema se reduce a calcular $16 - 4$. Estos niños operan con los datos de forma completamente irreflexiva y siguiendo la pauta recomendada por el libro de texto: selecciona la operación adecuada, que

Alumno 3B-5

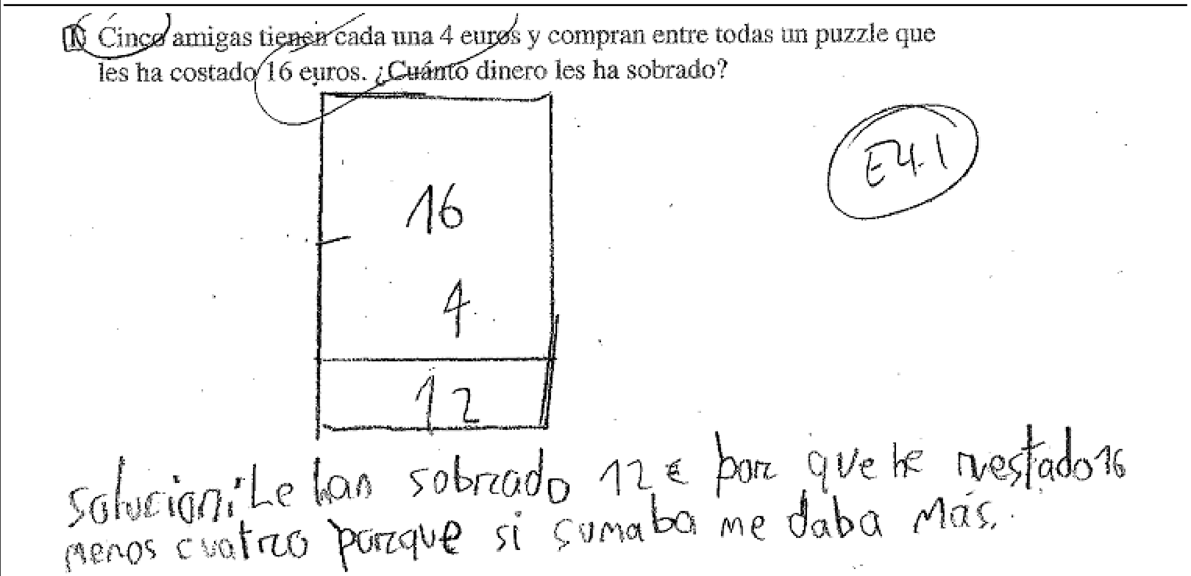


Figura 3.40: Figura 3. Problema 1. Solución incorrecta: palabra clave para elegir la operación.

parece estar primando sobre la que nosotros estamos intentando trabajar. Tenemos dos alumnos que justifican que hay que hacer una resta pues si quieren comprar hay que restar, o como el alumno 3B-5 en la figura 3.40, que expresa lo mismo en otros términos. Cuatro de ellos rectifican cuando les pedimos que nos expliquen la historia que cuenta el problema.

- Tres niños cometen errores de cálculo un tanto llamativos: $5 \times 4 = 30$, $5 + 4 = 10$ (al margen de ser operaciones sin sentido en este problema). Estamos observando que existen con frecuencia errores aritméticos básicos, no parece existir ningún tipo de revisión sistemática sobre los resultados obtenidos; no tienen interiorizada esta rutina.

- Hay un niño que toma los datos de forma tal que pone de manifiesto dos aspectos en los que hay que insistir en trabajar: resolver un problema no es calcular combinando números, hay que trabajar el sentido numérico. Esto también les pasa a los alumnos que plantean 16×4, pero este caso llama nuestra atención como muestra la figura 3.41.

Alumno 3C-6

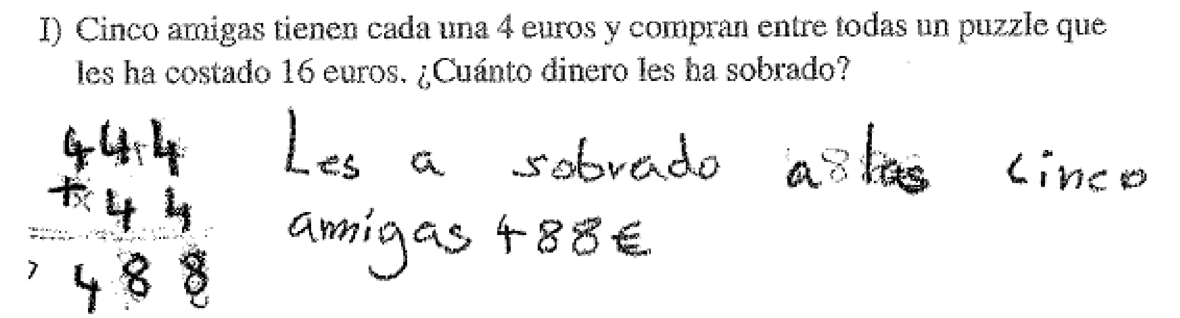


Figura 3.41: Figura 3. Problema 1. Toma de datos errónea y falta de sentido numérico.

8.2. Ficha 3 – Problema 2

Paula tiene 24 canicas. Su amiga Alba tiene la mitad que Paula, y Jaime tiene la mitad de canicas que Alba. ¿Cuántas canicas tienen entre los tres?

El problema tiene la misma estructura semántica que el segundo problema de la ficha 2 donde se trabajaba con el concepto de «doble». En esta ocasión trabajamos con el concepto mitad. De los 47 niños que han trabajado este problema, 25 lo han resuelto bien. Nueve lo han dejado en blanco y 13 de las respuestas presentan errores.

Durante las sesiones en los grupos A y B hemos optado por poner a trabajar juntos a los alumnos que afirman no entender el problema. Resultaron ser tres alumnos del grupo A y seis en el grupo B; todos ellos son alumnos que están mostrando tener dificultades también con otras asignaturas. Les hemos dado material manipulativo, la investigadora se ha llevado palitos de contar, y la maestra del aula se ha puesto a trabajar con ellos el problema. Antes de pasar a corregir en grupo ellos también han sido capaces de explicar cómo obtener la mitad de una cantidad física de palitos; no todos han sabido transformar este proceso en dividir por dos (todavía no han empezado con la división de reparto) pero tampoco han sabido conectarlo con la tabla de multiplicar del dos.

Antes de resolver el problema les hemos pedido que intentaran estimar el resultado. No han entendido la pregunta por lo que hemos cambiado a «¿puedo adivinar si el número de canicas va a ser mayor que 30 y menor que 50?». La respuesta de algunos ha sido que sí. La mayor parte de los alumnos han permanecido callados. El alumno al que hemos pedido que explicara su respuesta (se trata de un alumno con buenas habilidades aritméticas) ha dicho que es mayor que 30 «porque la mitad de 24 son 12 y esto ya casi es 30 y el doble de 24 son 48 que ya casi es 50» (C2. P15). Su respuesta ha causado sorpresa en los compañeros que han sabido seguir el argumento.

Para trabajar la estimación antes de empezar a resolver el problema convendría en primer lugar leer en voz alta el problema entre todos, explicar qué es lo que creemos que hay que hacer para encontrar la respuesta y hacer una estimación de su valor. Sin embargo, esto no nos permitiría identificar a nivel individual la forma en que cada alumno afronta el problema. Hemos trabajado este aspecto antes de corregir en conjunto el problema. Esta forma de trabajar la estimación difiere del enfoque que presenta el libro de texto. Los alumnos ya han trabajado siguiendo el libro de texto la «estimación de sumas de números de tres y cuatro cifras», y dentro de dos semanas se trabajará la estimación de la multiplicación. En ambos casos se practicará como un «algoritmo nuevo de cálculo» sin aportarles el sentido o la finalidad de esta forma de proceder. El enfoque propuesto por el libro de texto, figura 3.42, consistirá en hacer la operación por aproximación fuera del contexto de un problema y plantea ejercicios en los que una vez calculado el resultado exacto se pide que lo aproximes. Nuestro enfoque es muy distinto: estimaremos el resultado antes de realizar el cálculo. Esta estimación nos permitirá contrastar el resultado exacto obtenido con el estimado como medida de autocorrección y como actividad destinada a desarrollar el sentido numérico, esto nos permitirá evaluar el plan propuesto para abordar el problema[13].

Estrategias observadas

Como la segunda etapa es simplemente una suma de tres términos, no hay variaciones posibles. En la primera parte hemos encontrado cuatro formas diferentes de calcular los datos parciales del problema:

- Valiéndose de un dibujo para representar los datos de cada uno de los alumnos (cinco alumnos). Nos ha resultado muy curiosa la forma de resolverlo de dos de

[13] El libro de texto utiliza ambos términos indistintamente y con el mismo significado. Durante nuestras sesiones hemos diferenciado entre ambos términos pues entendemos que «aproximar» es obtener un resultado tan cercano al exacto como sea necesario para un propósito determinado (en línea con la segunda acepción de la RAE para este término). Mientras que por «estimar» entendemos dar un juicio sobre el valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una magnitud (también en línea con la RAE). La acción de estimar es previa al cálculo del valor mientras que la de aproximar sería el resultado de una acción de redondeo sobre los valores conocidos.

Fuente: Saber Hacer 3.º de Primaria. Editorial Santillana (pp. 40 y 86).

Figura 3.42: Instrucciones para aproximar sumas y productos.

ellos (figura 3.43). Estos alumnos han dibujado las 24 canicas de Paula, han tomado una sí otra no para dibujar las canicas de Alba y han repetido el proceso para las canicas de Jaime. Al final han contado cuántas tenía cada uno para hacer la suma. Cuando le hemos preguntado a uno de ellos «¿cómo lo has hecho?», ha contestado «como lo haces tú. Uno para ti otro para mí». Otro alumno ha dibujado 24 palitos y ha marcado con uno más alto la mitad de esta serie.

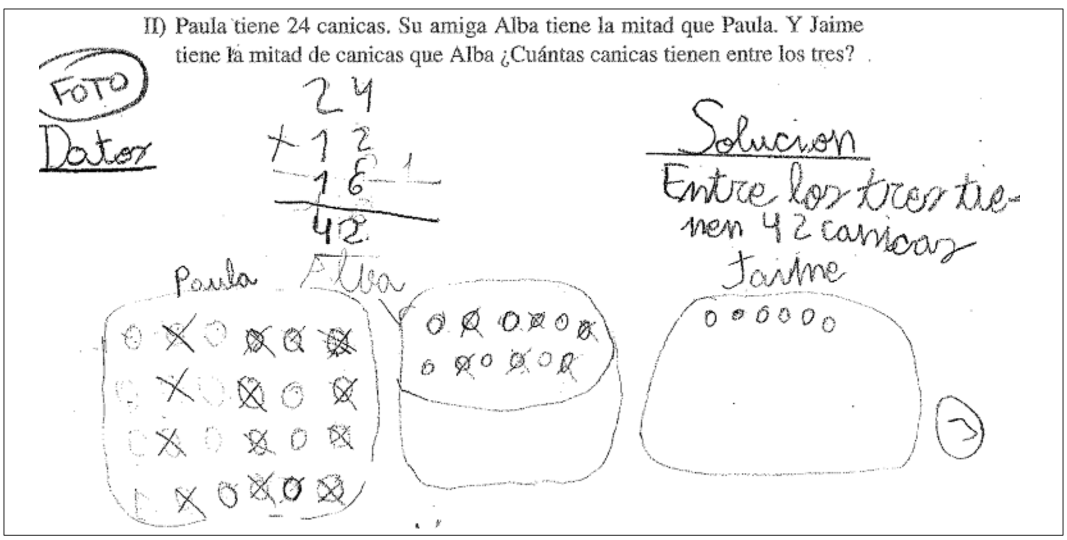
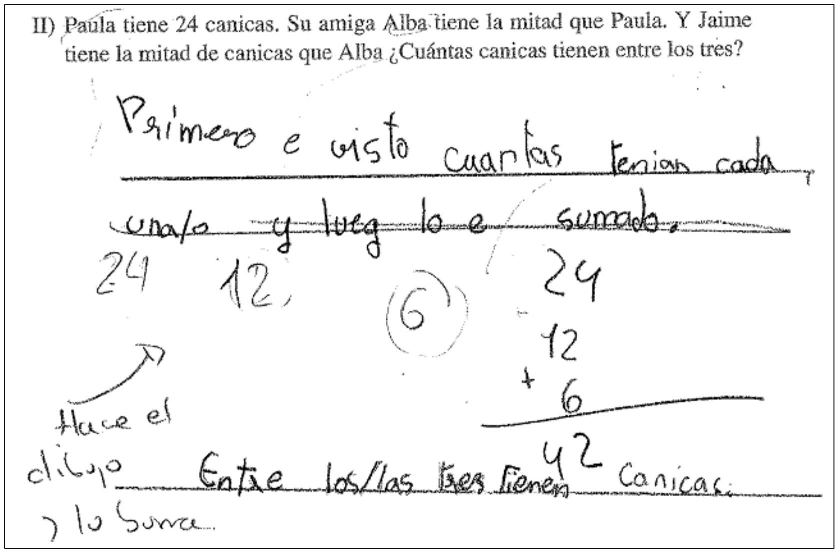


Figura 3.43: Ilustración de la solución del alumno 3B-17.

- Calculando el número de canicas que tiene cada uno a partir de la división explícita entre dos (ocho alumnos).
- Mediante cálculo mental (en todos aquellos problemas en los que aparece sin más


II) Paula tiene 24 canicas. Su amiga Alba tiene la mitad que Paula. Y Jaime tiene la mitad de canicas que Alba ¿Cuántas canicas tienen entre los tres?

Primero e visto cuantas tenian cada una/o y lueg lo e sumado.

24 12 6

24
12
+ 6
42

Hace el dibujo y lo suma.

Entre los/las tres tienen 42 canicas.

Figura 3.44: Ilustración de la solución del alumno 3B-11.

preámbulos la suma $12 + 6 + 3$ hemos considerado que se ha llegado a estas cantidades mediante cálculo mental).

- Restas sucesivas (tres alumnos), suma (un alumno) y una multiplicación (un alumno). Todos estos alumnos saben cuánto es la mitad de 12 y de 6. Plantean operaciones como $24-12$ y $12-6$ como parte de su explicación del proceso de resolución. Esto les permite además confirmar que han calculado bien la mitad de la cantidad original.

Modos de argumentación empleados y organización del trabajo

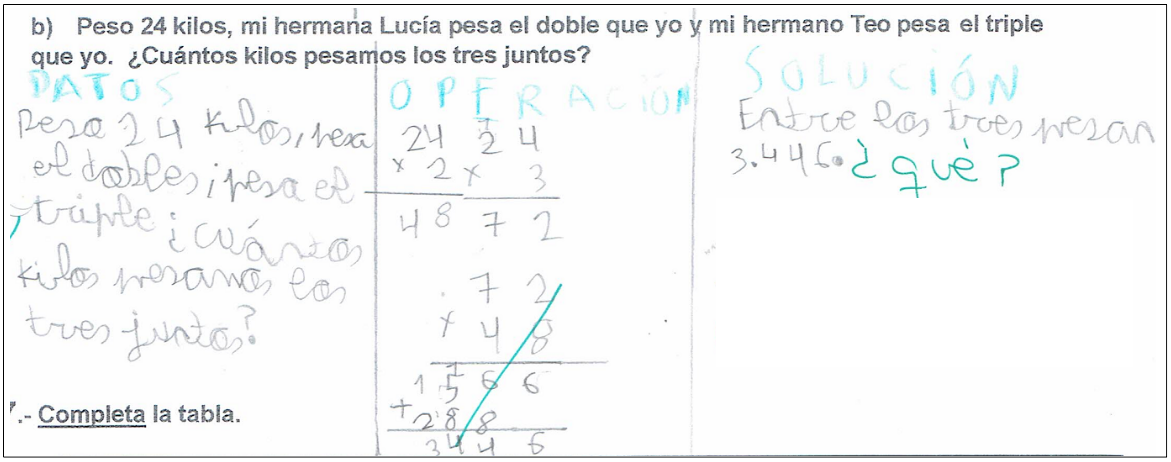
14 niños explicitan su proceso de razonamiento con mayor o menor detalle. El resto se vale de sus operaciones como argumentario implícito del proceso de resolución seguido.

Son también 14 los niños que explícitamente indican los datos y, de estos, 10 los contextualizan identificando el propietario de las canicas. Tenemos por último cinco niños que no han escrito una frase de solución para el problema.

Se observa que los alumnos van organizando mejor su trabajo y que hacen cierto esfuerzo por explicarlo, como se muestra en la figura 3.44.

Análisis de los errores detectados

El tipo de error que se ha dado con mayor frecuencia es el de cálculo: un total de siete


b) Peso 24 kilos, mi hermana Lucía pesa el doble que yo y mi hermano Teo pesa el triple que yo. ¿Cuántos kilos pesamos los tres juntos?

DATOS
Peso 24 kilos, pesa el doble, pesa el triple ¿cuántos kilos pesamos los tres juntos?

OPERACIÓN
24 × 2 = 48; 24 × 3 = 72
72 × 48 = 3446

SOLUCIÓN
Entre los tres pesan 3.446 ¿qué?

.- Completa la tabla.

Figura 3.45: Problema del control ordinario sobre los conceptos de doble y triple.

alumnos han cometido algún error en el algoritmo que han planteado.

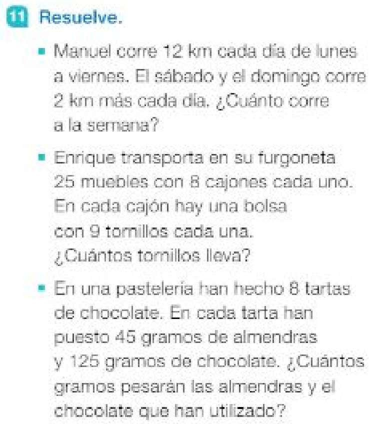
En segundo lugar, hemos detectado problemas para determinar el doble de una cantidad dada, al igual que pasó con el problema de la ficha 2, y que hemos observado en las operaciones de cálculo mental y en las balanzas. Determinar el doble o la mitad de una cantidad dada les sigue planteando dificultades a una parte significativa de los alumnos. No tenemos constancia de estudios al respecto, creemos que son necesarios y por tanto planteamos trabajar sobre la naturaleza de estas dificultades como línea de investigación para el futuro.

En el control ordinario que siguió a esta intervención se planteó el problema de la figura 3.45. Todos los niños identificaron el cálculo del doble con multiplicar por 2 y el del triple con la multiplicación por 3, pero solo la mitad de ellos lo resolvió correctamente; la otra mitad lo resolvió planteando la operación $24 \times 2 \times 3$. Y más de la mitad de los alumnos se equivocaron en alguno de los cálculos.

8.3. Ficha 3 – Problema 3

Roberto ha abierto su hucha, se ha comprado tres libros por los que ha pagado 15 euros por cada uno de ellos, le han sobrado 12 euros, ¿cuánto dinero tenía ahorrado?

Este es un problema en línea con los que ellos abordarán dentro de una semana y que se corresponde con la lección de su libro de texto «práctica de la multiplicación» (ver

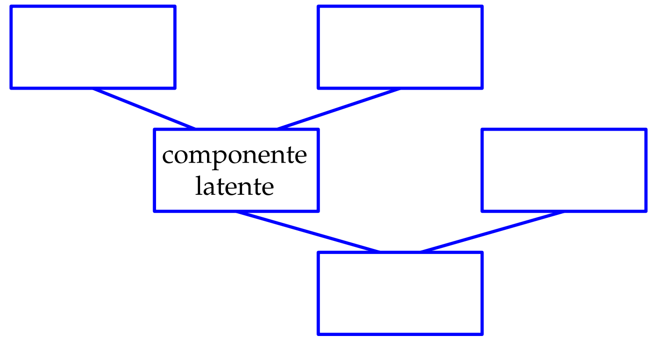


11 Resuelve.

- Manuel corre 12 km cada día de lunes a viernes. El sábado y el domingo corre 2 km más cada día. ¿Cuánto corre a la semana?
- Enrique transporta en su furgoneta 25 muebles con 8 cajones cada uno. En cada cajón hay una bolsa con 9 tornillos cada una. ¿Cuántos tornillos lleva?
- En una pastelería han hecho 8 tartas de chocolate. En cada tarta han puesto 45 gramos de almendras y 125 gramos de chocolate. ¿Cuántos gramos pesarán las almendras y el chocolate que han utilizado?

Fuente: Saber Hacer 3.º de Primaria. Editorial Santillana (p. 91).

(a)



(b)

Figura 3.46: a) Problemas propuestos en el libro para practicar multiplicaciones. b) Esquema jerárquico para el problema 3 de la ficha 3.

ejemplos en la figura 3.46.a). Es un problema completamente estándar con una estructura semántica como la que se muestra en la figura 3.46.b. Imaginarse en la situación inicial cuando no disponen de la cantidad de partida les resulta especialmente complicado. Hemos probado a leer con ellos el problema eliminando los datos y reproduciendo la situación sin cifras, las preguntas que les hemos planteado han sido las siguientes:

1. Esta mañana he cogido mi hucha y ¿qué he hecho con ella?
2. Con el dinero que había en la hucha, ¿qué he hecho?
3. Si he comprado tres libros, ¿puedo calcular algo?, ¿puedo ya saber algo?
4. Y después de comprar los libros, ¿qué me ha pasado?, ¿puedo ya saber algo más?, ¿puedo calcular algo?
5. ¿Puedo hacer un dibujo?
6. ¿Tengo datos para saber cómo empieza la historia?, ¿tengo datos para saber cómo termina la historia?
7. ¿A qué tengo que responder?, ¿a lo que pasa al final de la historia o a lo que pasa antes de la historia?

Pensar el problema a partir de la situación final les resulta muy complicado. No han sabido reconocer ninguna situación que les fuera familiar y que respondiera a esta estrategia, por ejemplo calcular la hora de salida de casa para no llegar tarde al colegio. En el estudio sobre heurísticas empleadas en la resolución de problemas en Educación Primaria llevado a cabo por Centro en Investigación y Pedagogía de Singapur, Teong, Hedberg, et al. (2009) observaron que solo en dos ocasiones de las 15 sesiones analizadas antes del estudio se había hecho referencia a esta estrategia y durante el estudio los alumnos no hicieron uso de la misma en ninguna ocasión.

De los 47 niños que han trabajado este problema dieciséis lo han resuelto correctamente, once lo han dejado sin contestar y veinte lo han resuelto mal. No podemos explicar el porqué de tantos niños que o bien lo han dejado en blanco o lo han resuelto mal. Por falta de tiempo no pudimos corregir este problema durante la sesión.

Hay 12 niños que han considerado que se pagan 15 euros por los tres libros y por tanto su solución es $15 + 12$. Cuatro han planteado $15 - 12 = 3$ euros (nos encontramos de nuevo con una respuesta que no se puede adaptar a la historia del problema ni a un error de comprensión) y otros cuatro niños restan los 12 euros que le sobran de los 45 euros que dicen que Roberto ha pagado por los libros. En estos dos últimos casos han relacionado el término «sobrado» con una resta como nos explicó un niño para justificar su operación.

Hay un niño que ha interpretado que cada vez que se adquiere un libro te sobran 12 euros (figura 3.47). Es un error que quizá se podría haber evitado con un enunciado más claro.

8.4. Primeras conclusiones de esta sesión. Acciones para la siguiente sesión

Se observa, sin entrar en más profundidad, que parece haber más información sobre el proceso en las fichas. El análisis de este punto nos muestra una de las carencias de la investigación: la recogida de datos en el instante mismo en que estos se producen, el seguimiento individualizado de los alumnos que es necesario pero no es factible.

El alumno 3A-3 parece estar haciendo distintas representaciones de una ficha a otra. Como se muestra en la figura 3.48, en la ficha 2 hace uso de representaciones simbólico-numéricas, mientras en la ficha 3 podríamos decir que hace uso de esta misma representación junto con la icónica-figurativa o artística; sin embargo, para resolver el problema sólo ha hecho uso de la primera. El dibujo aparece después de haber resuelto la tarea

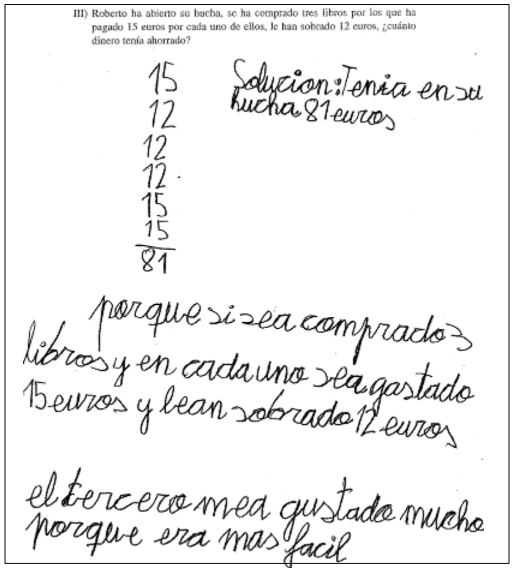


Figura 3.47: Ilustración de la solución del alumno 3B-21.

cuando le hemos pedido que pensara cómo explicar el problema a su hermano pequeño que no ha trabajado en él y no sabe resolver este tipo de problemas. La investigadora le ha pedido que lo pensara por un instante y después nos lo contara. Nos ha hecho un relato muy detallado del proceso haciendo uso en ese instante del dibujo. Para resolver el problema no necesitó de esta ayuda.

Esta misma situación se da con el alumno 3C-12 pero en sentido inverso (figura 3.49). Este alumno parece carecer de motivación intrínseca para el trabajo autónomo. Tan pronto se le presta atención se centra en la tarea y responde a lo que se le está pidiendo. En la ficha 3 comienza haciendo el dibujo y después plantea las operaciones, mientras que la situación que se había dado en la ficha 2 fue en sentido contrario. Mientras sus compañeros estaban trabajando en el problema le observamos en actitud pasiva. Le preguntamos si entendía el problema, y nos contestó que sí. La investigadora se sienta a su lado y le pide que resuelva el problema en voz alta para ella. Entonces nos relata qué cree que tiene que hacer. A continuación le pedimos que lo escriba y entonces escribe las operaciones. Finalmente, al pedirle que escriba lo que no ha contado hace el dibujo y por último narra el proceso. Esto nos lleva a pensar que solo en el caso de haber tenido la posibilidad de escuchar y seguir de primera mano el proceso del niño podremos saber cuál es la lógica que subyace a los bloqueos y errores del alumno.

Los casos en los que los alumnos copian el enunciado literalmente nos están llamando la atención desde la primera ficha. Es cierto que para abordar el problema hay que tener

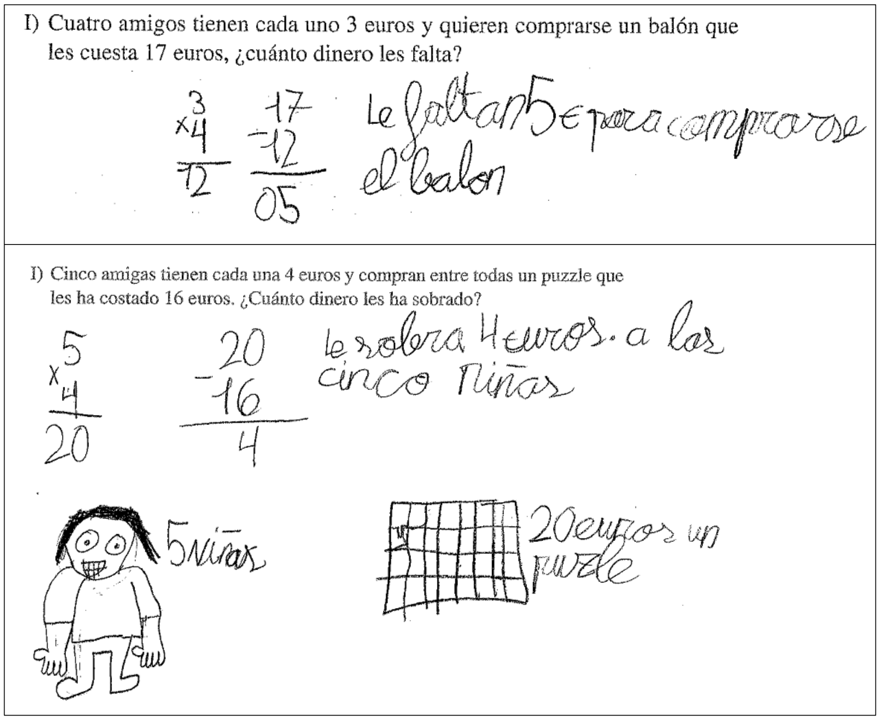


Figura 3.48: Evolución del alumno 3A-3.

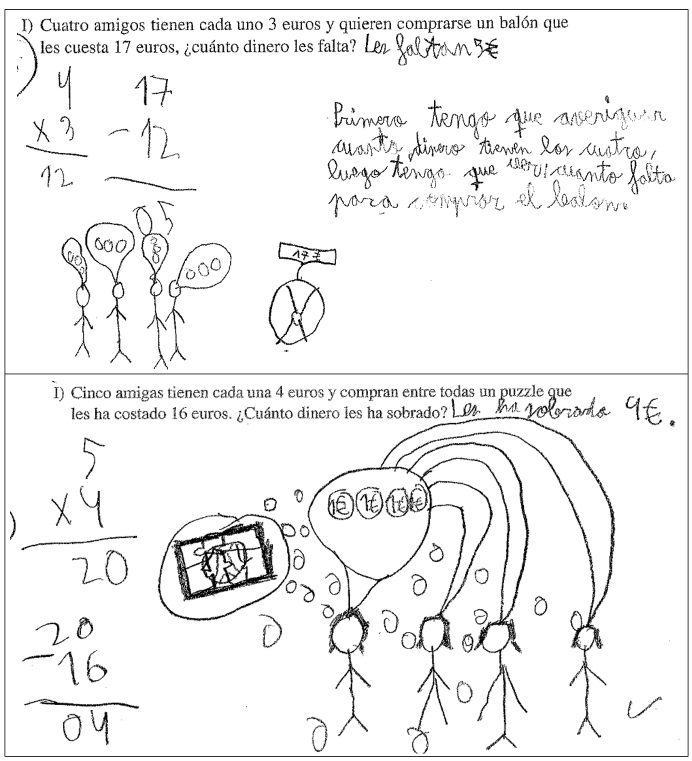


Figura 3.49: Evolución del alumno 3-C12.

conciencia de los datos y que para calcular hay que escribirlos. Pero anotar estos como un autómata evidencia la importancia que se le da al problema como acción de cálculo y el peso que se les concede a los números en sí mismos. El niño tiene que saber el *porqué* y *para qué* de estos datos y de los cálculos que está haciendo.

Por otro lado, que la mayoría de los alumnos no tomen nota de los datos y sus relaciones y pasen directamente a plantear una operación es un indicador de la falta de un de plan de trabajo previo: se calcula sin un hilo conductor. Se lee buscando unos números, una pregunta y se manipulan estos de forma poco reflexiva.

Para mejorar sobre este aspecto, tanto cuando corregimos nosotros como cuando es uno de los alumnos el que aborda la tarea, seguiremos una secuencia similar a esta: «como sé (los datos concretos que aporta el problema), si calculo esto (explicamos nuestro cálculo), ya sabré (resultado parcial obtenido fruto del cálculo o cálculos anteriores) y con ello puedo (explicamos el siguiente paso)», y todo ello se narrará antes de escribir en la pizarra. Cuando pasemos a plasmar las acciones narradas en la pizarra, nuestro plan de resolución, haremos uso de dibujos y esquemas con soporte verbal. También mostraremos cómo emitir conjeturas, hacer predicciones. El trabajo matemático consiste en hacer una predicción sobre una situación y someterla a prueba. Los buenos resolutores hacen esto. Los alumnos aprenden, como ya hemos indicado con anterioridad, por imitación. Solo si nosotros ponemos énfasis y cuidado en mostrar la forma de resolver ellos pondrán interés en seguirla y hacerla suya.

Y al hilo de esta última observación hay que trabajar con ellos el proceso de revisión del resultado, si es coherente con la situación y el problema planteado: siempre desde la pregunta planteada por el maestro: ¿es posible que la cantidad de dinero con el que salgo de casa sea menos que la cantidad de dinero que tengo que pagar por la compra? Esta situación se ha dado en el primer problema de esta ficha. Debemos enfatizar el resultado numérico con la situación del problema, plantearnos en voz alta en todo momento «y ¿esto es posible?, ¿tiene sentido?».

En la tabla 3.4 encontramos el resumen de los resultados de esta ficha. A pesar de los errores encontrados en términos de éxito en la resolución, la actitud hacia la resolución de problemas está evolucionando muy positivamente, los alumnos se muestran «entusiasmados» con las sesiones y muestran un gran interés por explicarse y poner en común sus propuestas. A partir de los comentarios observados y con la ayuda de las maestras del grupo hemos podido elaborar el gráfico de red que se muestra en la figura 3.50.

Tabla 3.4: Resumen de respuestas de los problemas de la ficha 3.

	Número de respuestas	Correctas	Incorrectas	En blanco
Problema 1	47	26	20	1
Problema 2	47	25	13	9
Problema 3	47	16	20	11

Fuente: elaboración propia.

Para la siguiente ficha nos planteamos problemas de nuevo menos estándar que los de estas dos últimas fichas. Estos han tenido la finalidad de trabajar las actitudes desde una estructura problema más afín a los trabajados en el aula.

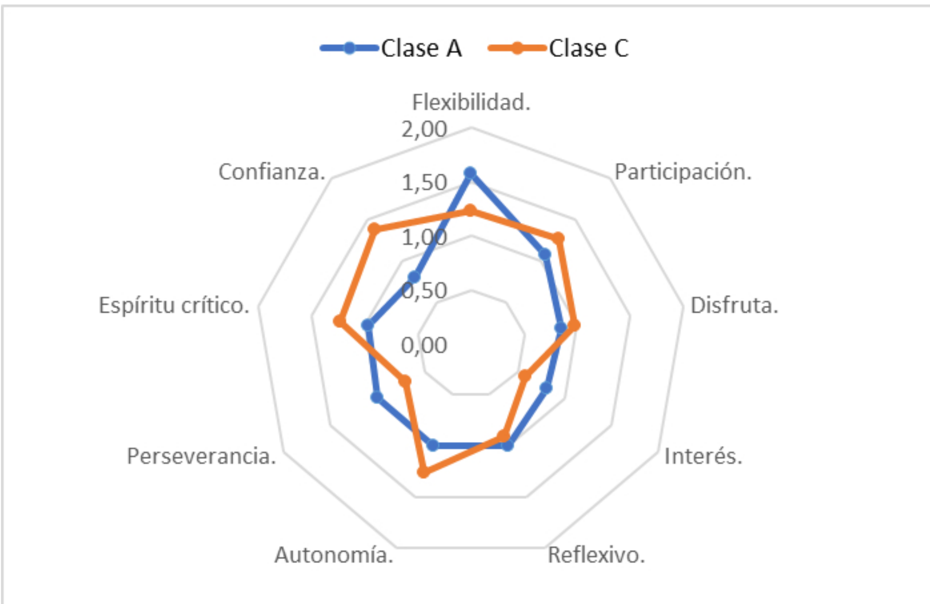


Figura 3.50: Representación gráfica de la matriz de actitudes en la fase intermedia.

9. Análisis de la ficha 4

Los tres problemas que hemos planteado en esta ficha han causado un alto grado de perplejidad entre los alumnos. Esperamos que sepan plantearlos y resolverlos a partir de representaciones gráficas y por conteo sobre estas representaciones o sobre modelos creados por ellos mismos y trabajar con ellos el paso a expresiones matemáticas.

9.1. Ficha 4 – Problema 1

De un paquete de galletas que trae cuatro galletas, ¿cuántas raciones de $\frac{1}{2}$ puedo preparar?

El enunciado de este problema es bastante confuso desde el momento que no se especifica si se trata de raciones de media galleta o medio paquete. Una vez aclarado para todo el grupo el significado del símbolo $\frac{1}{2}$ les pedimos que interpretaran el enunciado, ¿qué podíamos querer decir con raciones de «un medio», «un medio de qué»?

En la clase A se genera una interesante discusión pues tan pronto el alumno A2 da su versión «raciones de media galleta», el alumno 3A-13 considera que está equivocado pues son «raciones de medio paquete» (C1. P29) (figura 3.51). El resto de los alumnos toman partido por una u otra opción, pero ninguno de ellos considera las dos opciones como sí sucede en la clase B, con el alumno 3B-3 (figura 3.52) o el alumno 3B-13. Aunque este último no llega a elaborar una frase de respuesta para la segunda opción, sí dibuja ambas.

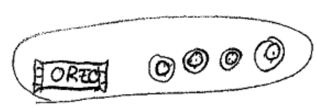
Alumno 3A-4

I) De un paquete de galletas que trae cuatro galletas. ¿Cuántas raciones de $\frac{1}{2}$ puedo preparar?

Yo me como dos galletas y tú otras dos y on eso solo se pueden 2 personas. Y como 2 es par pues solo se puedo repartir en dos.

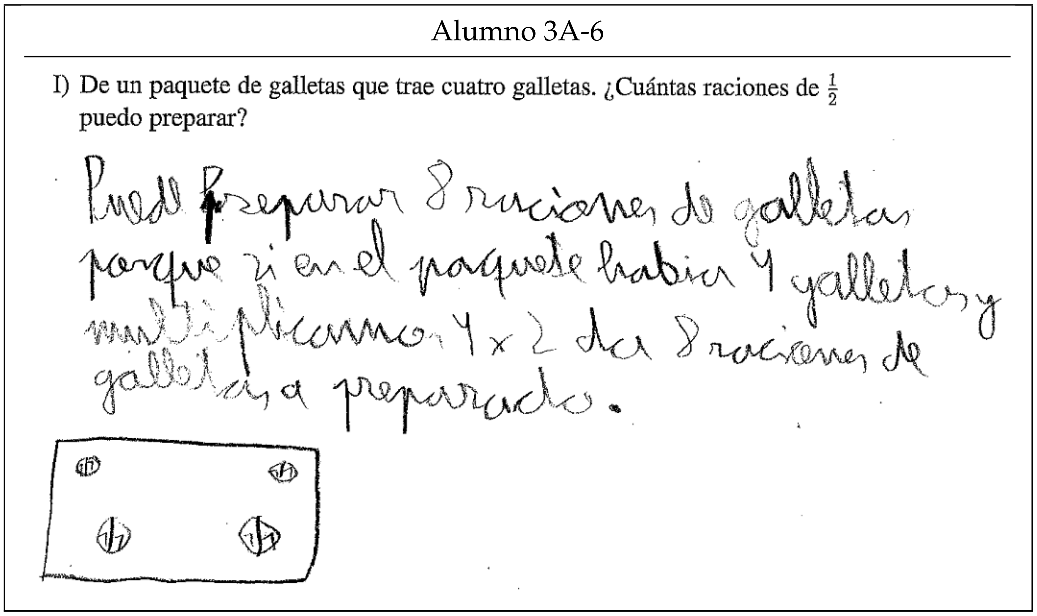
Alumno 3A-13

I) De un paquete de galletas que trae cuatro galletas. ¿Cuántas raciones de $\frac{1}{2}$ puedo preparar?



2 raciones de Galletas

Primero he dibujado un paquete de Galletas y cuatro galletas, he pensado y me han salido 2 raciónes.



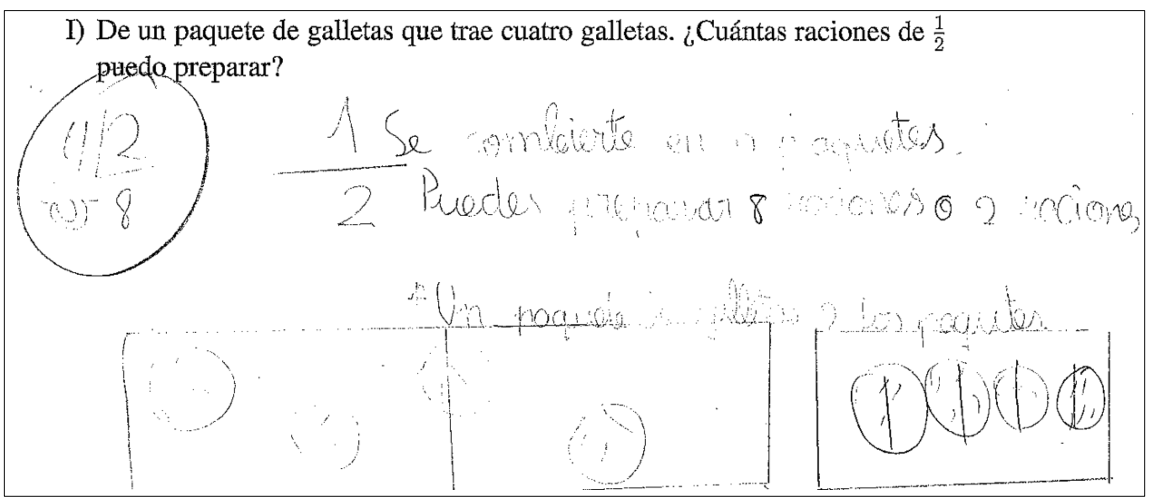
Alumno 3A-6

I) De un paquete de galletas que trae cuatro galletas. ¿Cuántas raciones de $\frac{1}{2}$ puedo preparar?

Puedo preparar 8 raciones de galletas porque si en el paquete habia 4 galletas y multiplicamos 4 x 2 da 8 raciones de galletas a preparado.

Figura 3.51: Ficha 4. Problema 1. Diferentes interpretaciones de $\frac{1}{2}$.

Esta situación no se da tampoco en la clase C, donde todos los alumnos se decantan por preparar raciones de media galleta.



I) De un paquete de galletas que trae cuatro galletas. ¿Cuántas raciones de $\frac{1}{2}$ puedo preparar?

$\frac{1}{2}$ Se convierte en 2 paquetes. Puedes preparar 8 raciones o 2 raciones

Figura 3.52: Ficha 4. Problema 1. El Alumno 3B-3 considera las dos interpretaciones posibles.

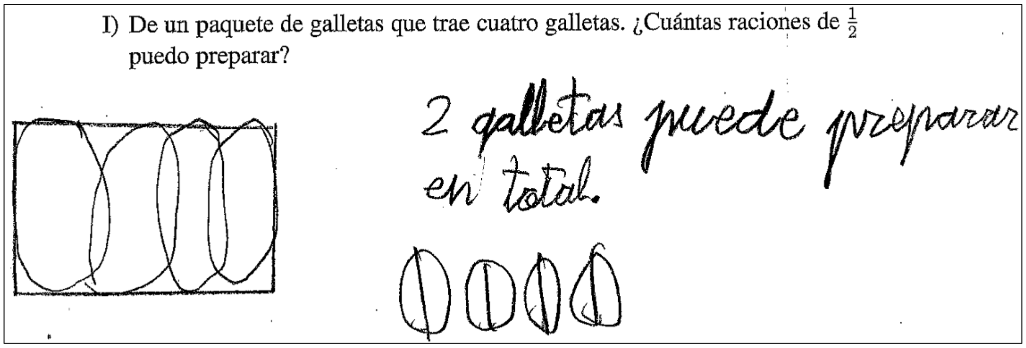


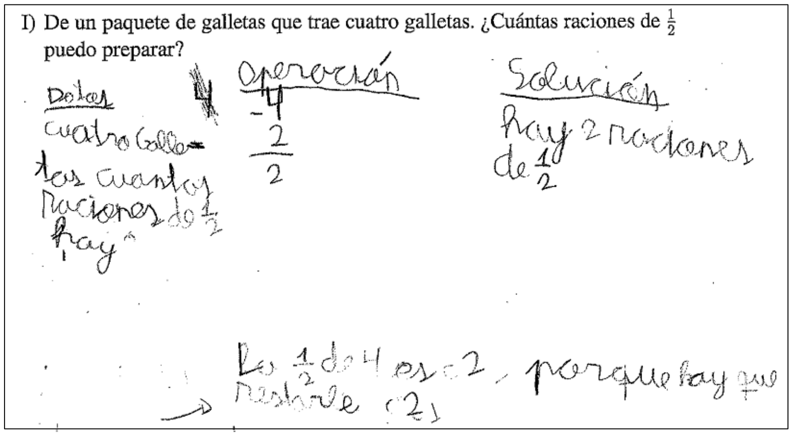
Figura 3.53: Ficha 4. Problema 1. Solución del Alumno 3B-21.

El problema lo han trabajado 46 alumnos. No tenemos explicación para la resolución de catorce de ellos pues no parece haber concordancia entre lo que dibujan y lo que contestan, como el caso del alumno 3B-21 (figura 3.53). Un total de 31 alumnos ha contestado correctamente. Cuatro de ellos (todos del grupo B) consideran las dos opciones al dibujar aunque al contestar se decantan solo por una de las dos. De los 27 alumnos restantes, diez toman raciones de medio paquete y el resto hace ocho raciones de media galleta.

El alumno 3C-15 plantea la resta $4-2=2$ (figura 3.54). Este alumno ha resuelto bien todos los problemas de doble y mitad trabajados hasta el momento. Queríamos confirmar que no estaba mezclando obtener la mitad (dividir entre dos) con restar dos. Su respuesta deja muy claro que no está equivocado.

Los alumnos no han empezado todavía el estudio de las fracciones; el problema tiene el propósito de introducir la simbología de las fracciones para un caso ya estudiado, hacer la mitad.

La discusión en grupo permitió hablar sobre los conceptos de parte y todo involucrados en las fracciones. Estos conceptos se trabajaron en la siguiente sesión contruyendo con ellos el muro de fracciones que se observa en las fotografías de la figura 3.55. La construcción fue acompañada de momentos de exploración y formulación de preguntas por parte de los alumnos. Les planteamos un par de preguntas a modo de ejemplo como «¿qué es mayor 1/2 o 1?», «¿puedes demostrarlo?», ¿cuántos 1/2 necesitas para hacer 1?» y después por parejas les pedimos que inventaran una serie de preguntas-problemas para su compañero, la mayor parte de ellos planteó preguntas similares a las de los ejemplos pero dos alumnos del grupo A y tres más del grupo B acertaron a explorar con el muro de fracciones de los dos y llegaron a plantear preguntas como: «¿cuántos 1/2 necesito para hacer 2?» (han juntado dos barras de unidad y han completado con las 4 barras de 1/2).



I) De un paquete de galletas que trae cuatro galletas. ¿Cuántas raciones de $\frac{1}{2}$ puedo preparar?

Datos
cuatro galle
las cuantas raciones de $\frac{1}{2}$ hay

Operación
4
-4
2
2

Solución
hay 2 raciones de $\frac{1}{2}$

Los $\frac{1}{2}$ de 4 es 2, porque hay que restarle (2)

Figura 3.54: Ficha 4. Problema 1. Solución del Alumno 3C-15.

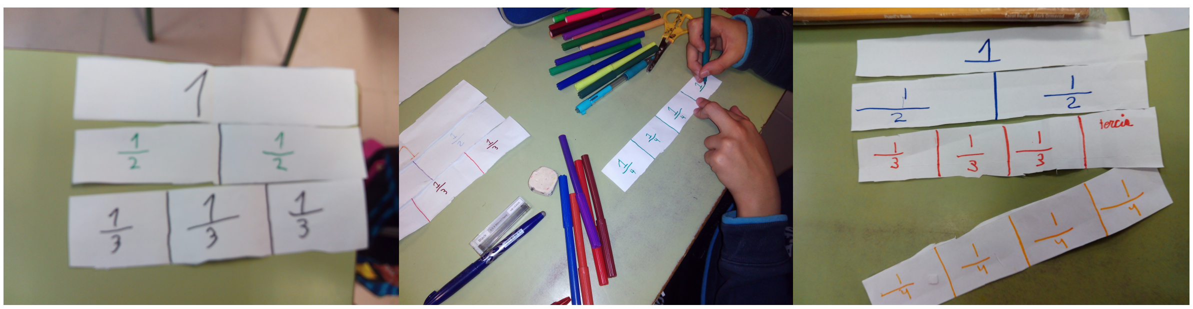


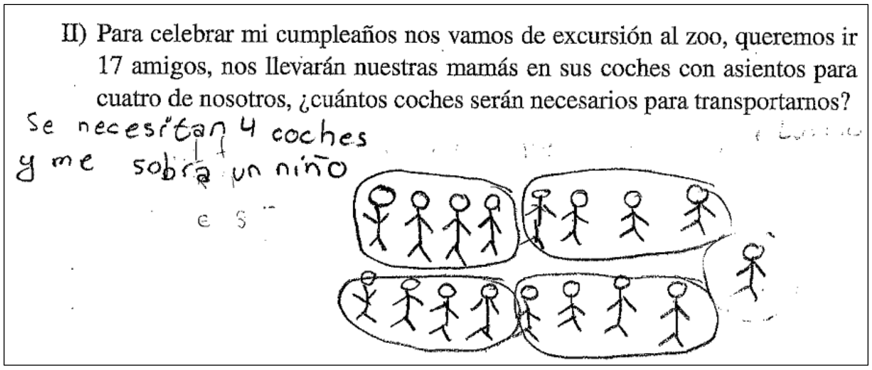
Figura 3.55: Trabajando sobre el muro de fracciones.

9.2. Ficha 4 – Problema 2

Para celebrar mi cumpleaños nos vamos de excursión al zoo, queremos ir 17 amigos, nos llevarán nuestras mamás en sus coches con asientos para cuatro de nosotros, ¿cuántos coches serán necesarios para transportarnos?

Se trata de un problema de división por agrupamiento que no ha resultado abordable para una gran parte de los niños. Contamos con 46 respuestas, hay 25 niños que no han comprendido el problema y han planteado soluciones que ponen de manifiesto la falta de comprensión sobre las operaciones y la falta de sentido numérico. 20 alumnos lo han resuelto correctamente y solo uno lo ha dejado sin contestar.

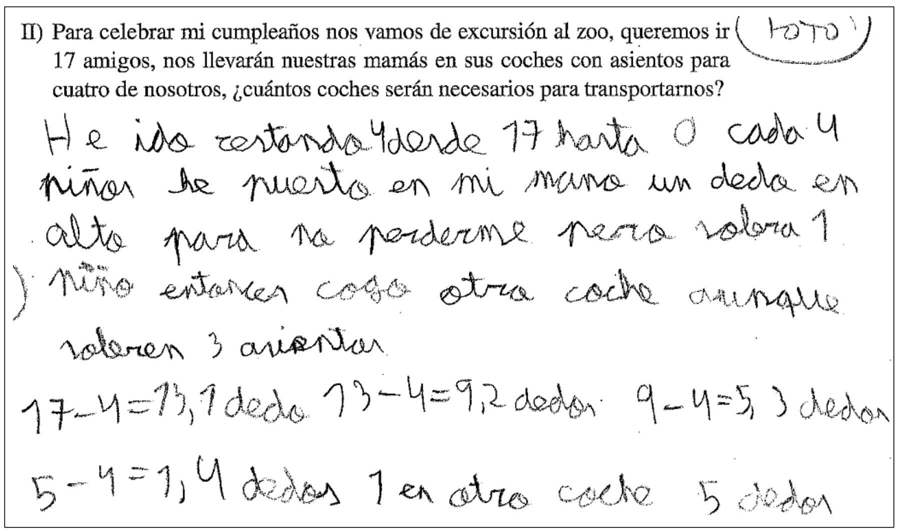
Vamos a estudiar este problema a partir de casos concretos, pero resumimos antes las estrategias encontradas:



II) Para celebrar mi cumpleaños nos vamos de excursión al zoo, queremos ir 17 amigos, nos llevarán nuestras mamás en sus coches con asientos para cuatro de nosotros, ¿cuántos coches serán necesarios para transportarnos?

Se necesitan 4 coches y me sobra un niño

Figura 3.56: Ficha 4. Problema 2. Solución del Alumno 3A-8.



II) Para celebrar mi cumpleaños nos vamos de excursión al zoo, queremos ir 17 amigos, nos llevarán nuestras mamás en sus coches con asientos para cuatro de nosotros, ¿cuántos coches serán necesarios para transportarnos?

TOTO

He ido restando 4 desde 17 hasta 0 cada 4 niños he puesto en mi mano un dedo en alto para no perderme pero sobra 1 niño entonces cogo otro coche aunque sobren 3 asientos

17-4=13, 1 dedo 13-4=9, 2 dedos 9-4=5, 3 dedos

5-4=1, 4 dedos 1 en otro coche 5 dedos

Figura 3.57: Ficha 4. Problema 2. Solución por restas iteradas.

- Plantear un dibujo y hacer agrupaciones de cuatro para determinar el número de coches necesarios. 23 alumnos han procedido de esta forma pero solo catorce lo han resuelto correctamente, el resto deja un pasajero sin plaza en los coches (figura 3.56).
- Plantear la división de $17 : 4$. Encontramos esta estrategia en ocho ocasiones y solo en tres de ellas la respuesta al problema es correcta.
- Restar $17 - 4$ de forma iterada. Es el caso de un alumno (figura 3.57).
- Hacer operaciones sin sentido como 17×4, $17 + 4$ o $17 - 5$. El número obtenido al hacer la operación es la cantidad de coches necesarios (19 alumnos). Hay cuatro niños que en un principio plantearon la operación 17×4; cuando les preguntamos si serán necesarios más coches que niños, borran y cambian de estrategia. Este fue

el caso del alumno 3A-8 mostrado en la figura 3.56; aunque en la copia no se aprecia que ha borrado la operación, lo hemos podido comprobar viendo el trabajo original. Este alumno opta finalmente por resolverlo gráficamente.

Este problema ha dejado bloqueados a algunos alumnos como es el caso del alumno de la figura 3.58. Estos alumnos se han planteado la resolución gráfica y esperan en cierto modo completar coches, al ver que esto no es así, pasan a hacer la división y se quedan bloqueados al comprobar que no es exacta. Otros alumnos llegan a esta misma situación invirtiendo el proceso, comienzan con la división y pasan a la resolución gráfica. Un alumno explicó «lo he intentado con un gráfico pero me sale igual». Analizando el trabajo final de los alumnos encontramos seis alumnos que dejan plasmada esta situación. Pero fueron algunos más los que se encontraron en esta situación. Hay tres alumnos que optan por decir que son cuatro coches y en uno tienen que ir cinco amigos. En el aula B un alumno preguntó en voz alta si en todos los coches debían ir el mismo número de amigos pues si eran 17 uno tendría que ir solo o no ir. Este alumno optó por utilizar cinco coches y redistribuir a los amigos. Al corregir el problema en grupo comentamos con ellos este tipo de situaciones en las que añadimos consideraciones o restricciones al problema que no figuran en el enunciado.

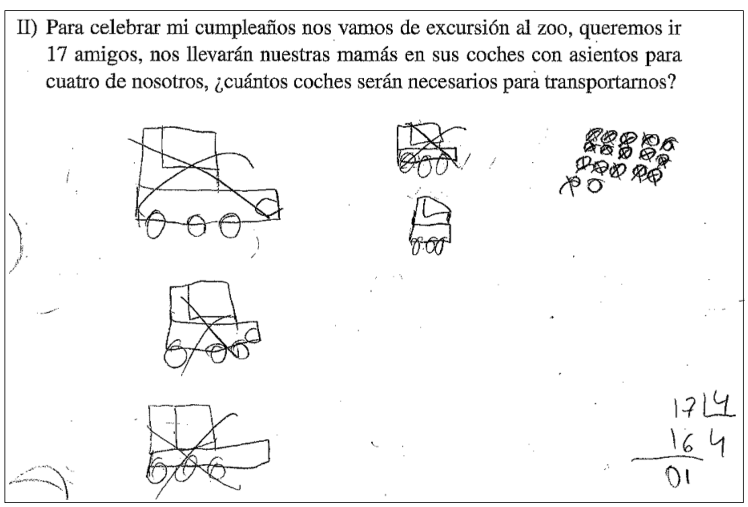


Figura 3.58: Ficha 4. Problema 2. Solución del Alumno 3A-11.

En todos los casos en los que el alumno ha comentado que serían necesarios cuatro coches se ha asimilado la división a una división de reparto equitativo y el resto se ha tomado literalmente como tal: «es lo que sobra». Esta situación es equivalente a la analizada en el capítulo 2, el problema de las latas de pintura de la prueba TIMSS. Volveremos sobre este

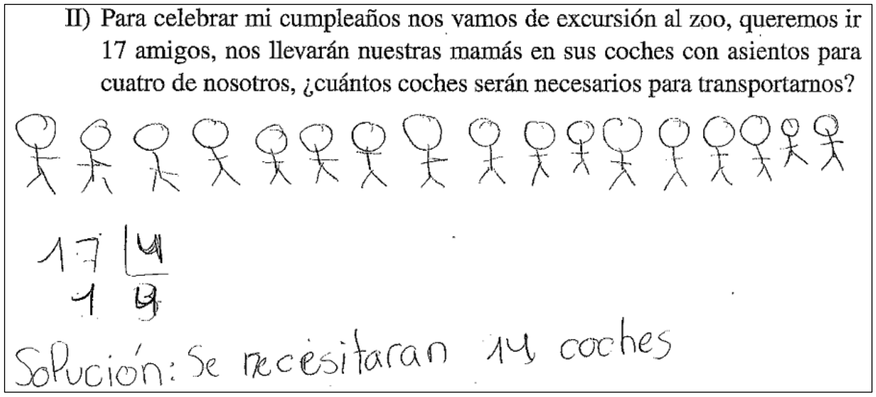


Figura 3.59: Ficha 4. Problema 2. Error de comprensión del algoritmo de la división.

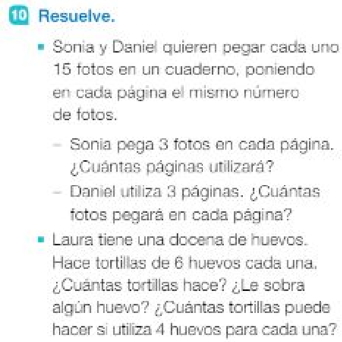
tipo de situaciones en el problema siguiente y cuando estos alumnos estén en cuarto de primaria. En este curso les hacemos indicaciones a las maestras sobre el tipo de problemas adecuados para trabajar estos errores.

A lo largo de estas sesiones y también en los problemas trabajados en clase y propuestos en los controles nos encontramos con soluciones sin sentido numérico, los alumnos llegan a ellas por falta de comprensión sobre las operaciones que plantean. El caso que se muestra en la figura 3.59 es un ejemplo extremo de no entender ni la operación, ni el algoritmo (no es el único que se nos ha dado y nos ha llamado la atención). Determina el número de coches necesarios tomando el resto y el cociente: «necesita 14 coches», este alumno se había equivocado al dividir, tenía $17 : 4 = 3$, $r = 2$ y su solución inicial era «se necesitan 23 coches»; cuando le preguntamos «¿es lógico necesitar más coches que niños?», borra la operación dice «me he equivocado» y plantea la nueva solución que sigue siendo igual de errónea pero nos permite confirmar que no entiende el proceso ni el algoritmo.

9.3. Ficha 4 – Problema 3

El álbum de mi colección de cromos tiene cinco cromos por página, ¿en qué página estará el cromo número 78?

Este problema responde a la misma estructura semántica que el problema anterior. Son problemas a priori muy sencillos pero que están relacionados con el sentido de cociente y el resto de una división. Los problemas de divisiones planteados en el libro de texto



10 Resuelve.

- Sonia y Daniel quieren pegar cada uno 15 fotos en un cuaderno, poniendo en cada página el mismo número de fotos.
  - Sonia pega 3 fotos en cada página. ¿Cuántas páginas utilizará?
  - Daniel utiliza 3 páginas. ¿Cuántas fotos pegará en cada página?
- Laura tiene una docena de huevos. Hace tortillas de 6 huevos cada una. ¿Cuántas tortillas hace? ¿Le sobra algún huevo? ¿Cuántas tortillas puede hacer si utiliza 4 huevos para cada una?

Fuente: Saber Hacer 3.º de Primaria. Editorial Santillana (p. 105).

Figura 3.60: Ejemplo de problemas de división del libro de texto.

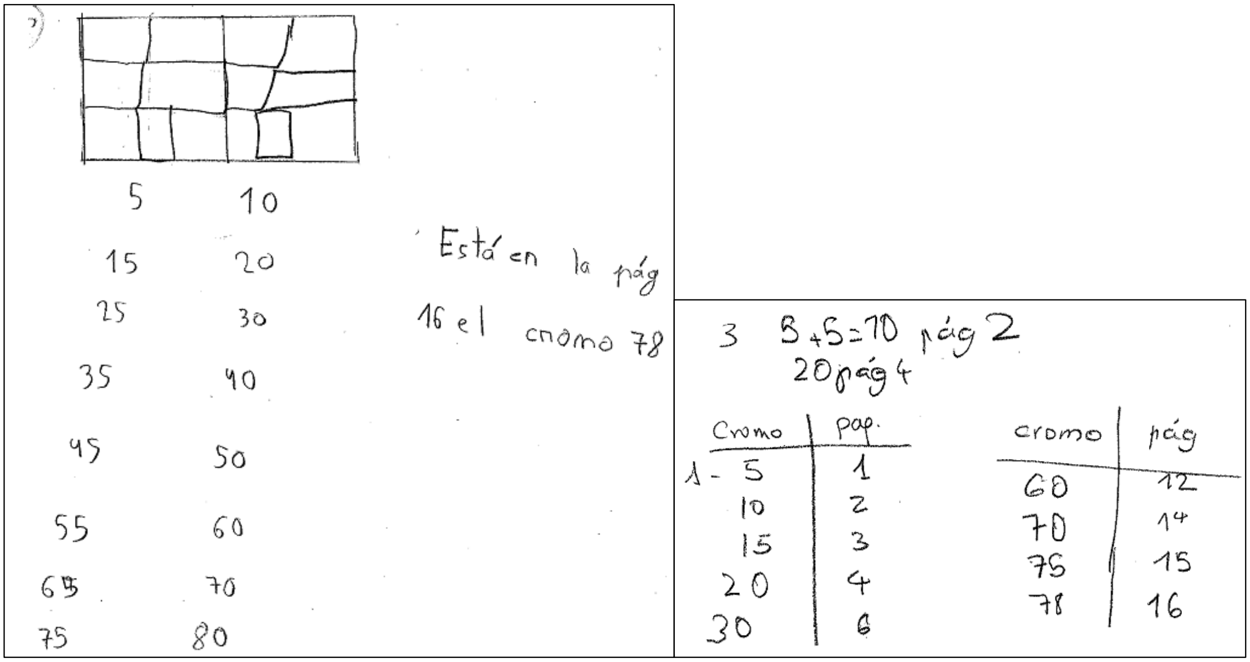
y con temática similar a la nuestra son divisiones exactas por lo que no requieren una interpretación más elaborada de la división con resto (figura 3.60).

El problema solo lo hemos trabajado en la clase C, en las demás no ha dado tiempo. De las 15 respuestas con que contamos, ningún niño lo ha dejado en blanco y ocho lo han solucionado correctamente; el resto no ha entendido el enunciado por lo que ha planteado operaciones sin sentido como 17×5 (la más común), y variaciones de suma y resta con estos números.

Hay cinco niños que han cambiado de estrategia e incluso de representación con respecto a lo que habían planteado en el problema 2. Solo dos de ellos consiguen resolver este problema correctamente. Estos alumnos han pasado a intentar un dibujo cuando antes habían planteado una división.

Ha habido una única forma de abordar el problema con éxito: agrupar y contar de cinco en cinco, con diferentes variedades de representación según las habilidades de cálculo del alumno. Ningún alumno ha llegado a plantear la división $78 : 5$.

El alumno 3C-13 (figura 3.61.(a)) se vale tan solo del dibujo para responder a la pregunta. Le hemos observado mientras trabajaba: nos pidió una hoja para poder escribir los números y empezó a escribir los números del 1 al 20; paró y cambió a la hoja del problema. Este alumno pensó en escribir todos los números del 1 al 78, en línea con la estrategia que ha utilizado para el problema 2 de esta ficha; seguidamente se para a pensar y cambia de estrategia; en ese momento pasa a la ficha, y dibuja dos páginas del libro con cinco cromos en cada una (cuenta de cinco en cinco y va completando páginas), tal y como se observa en su resolución (figura 3.61.(a)).



(a) (b)

Figura 3.61: (a) Alumno 3C-13. (b) Ejemplo de hoja de trabajo en sucio.

Esta misma pauta es seguida por el alumno de la figura 3.61.(b). Este alumno, antes de avanzar en el proceso nos llama, nos lo explica y nos pide ayuda para continuar. Se le plantea hacer uso de una tabla, se le explica y el alumno completa con éxito la tabla. Le pedimos a este alumno que explique al grupo su solución y lo hace correctamente.

10. Evolución de los alumnos

La tabla 3.5 nos muestra los resultados obtenidos en esta ficha.

A la vista de los resultados podemos concluir que se aprecian cambios significativos en las capacidad y actitudes de los alumnos hacia la resolución de problemas y que debemos dotarles de un mayor grado de autonomía y confianza en sus capacidades (figura 3.62). En el aula A estos puntos se muestran como los más débiles y son los que menos han evolucionado a lo largo de la intervención. Por otro lado, la evolución del aula C parece responder a un desarrollo más armonioso. ¿A qué pueden ser debidas estas diferencias?, entendemos que es el momento en el que tal y como predecía Schoenfeld (1983, 1992) hay

Tabla 3.5: Resumen de respuestas de los problemas de la ficha 4.

	Número de respuestas	**Correctas**	**Incorrectas**	**En blanco**
Problema 1	46	31	14	1
Problema 2	46	20	25	1
Problema 3	15	8	7	0

Fuente: elaboración propia.

que considerar otros aspectos en la resolución de problemas y una buena parte de ellos transcienden al mundo matemático.

En la clase A se dan personalidades y actitudes con tendencias a destacar, significar, mientras que en el aula C hay una mayor conciencia de grupo. En el aula A encontramos tres alumnos con muy buenas capacidades matemáticas pero actitudes sociales muy diferentes, el alumno reconocido y aceptado por todos (salvo uno de sus «competidores» directos) como el alumno más brillante muestra una carencia de empatía hacia los demás importante, hay que hacer notar también la actitud y comentarios de algunos de sus maestras que parecen los más acertados pues aprueban sus respuestas correctas pero no se muestran muy amables con él, desde el punto de vista de la investigadora es un niño con un comportamiento egocéntrico que puede ser debido al mayor nivel madurativo que presenta con respecto a sus compañeros. Es un niño con inquietudes intelectuales mayores que las de sus compañeros. Su competidor más directo es observado con recelo por los alumnos de su mismo género al tiempo que existe también rivalidad no solo de carácter intelectual sino de género entre estos dos alumnos. El tercero de este grupo de alumnos tiene una carácter con tendencia a «no meterse en líos» e intentar pasar desapercibido. Responde al patrón de niño obediente, tranquilo y que no levanta la voz. Se aprecian diferencias en la manera de dirigirse a unos y otros por parte de los adultos del centro. El análisis de las calificaciones medias y medianas de este grupo nos muestra una mayor desviación que en los otros grupos, hemos pedido a todas las maestras del grupo que nos facilitaran esta información.

En el grupo C hay que destacar dos puntos, la mayor implicación de la tutora del grupo en hacer que las sesiones ordinarias de clase fueran desviándose hacia un protocolo de actuación más similar al de las sesiones de problemas y la actitud mucho más tranquila y enfocada a trabajar con cada niño individualmente pero como pieza importante del grupo. Por otro lado la tutora del grupo A pronto asumen la actitud de profesoras tem-

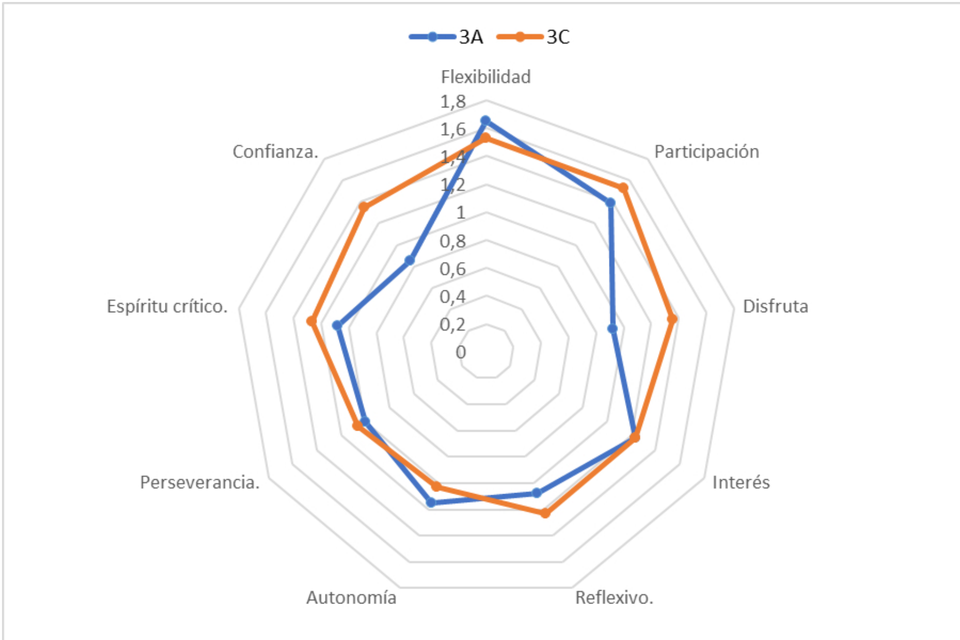


Figura 3.62: Gráfico radial del análisis de las actitudes observado al concluir la intervención.

porales en el centro, toma la decisión de solicitar cambio de centro prácticamente al final del primer cuatrimestre. La tutora del grupo C quiere, confía y en cierto modo sabe que al curso siguiente estos alumnos serán de nuevo alumnos suyos y en este curso parece estar más centrada en trabajar valores y comportamientos adecuados, en corregir problemas de lectoescritura y hábitos de estudio en general que actitudes matemáticas o de ciencias en particular.

Hay aspectos sobre los que hay trabajar en todos los grupos:

- El primero, y quizás más importante, está relacionado con la metacognición, los alumnos tienen que ser conscientes de lo que saben y no saben hacer, de lo que pueden abordar y lo que no. La mayoría de ellos al recibir la hoja de problemas no se plantean leer todos los problemas y trabajar en primer lugar aquellos que saben solucionar, hay problemas que solucionan mal, haciendo uso de conceptos erróneos y creen tener bien resueltos e incluso son percibidos como muy fáciles, y por el contrario problemas que han llegado a solucionar correctamente pero que al no ser abordados «con una cuenta» sólo aciertan a decir que creen haberlo resuelto pero no están seguros de que sea de la manera correcta. Los alumnos abordan los problemas en orden, no se plantean leerlos todos y empezar por el que les resulte más atractivo, o más fácil, etc. Enseñar al alumno a organizar su trabajo, tomar decisiones sobre cómo y en qué orden abordar las tareas le dotará de un grado mayor de autonomía y confianza en sus propias capacidades.

- Borran sistemáticamente todo aquello que consideran que no está bien. Están educados en la cultura «equivocarse no es bueno» al tiempo que les pone muy nerviosos tener en la hoja cosas tachadas (les hemos pedido que no tachen lo que consideren que está mal y que nos lo hagan saber de algún modo, pero que no lo borren). Es usual pedir a los alumnos que borren todo aquello que no se corresponda con la solución que se considera correcta al tiempo que se pide que el cuaderno de trabajo esté limpio y ordenado; hay alumnos a los que ya desde Educación Infantil se les hace repetir la ficha de trabajo si esta contiene errores[14].

- Han mejorado en cuanto a su forma de explicar lo que han pensado o quieren hacer, pero cuando se bloquean les sigue resultando muy difícil explicar sus bloqueos, qué es lo que no comprenden o les lleva a interpretar el problema de forma equivocada. Una vez más el tiempo de que se dispone en las sesiones de clase es muy limitado, no hay tiempo para ayudarles con sus dudas y para enseñarles a darnos pistas que nos puedan servir para orientarles. En este sentido, la investigadora no ha sabido en algunas ocasiones dar con la pregunta adecuada y como maestros debemos aprender a no facilitar nuestra solución. En algunas ocasiones ha sido necesario frenar a las maestras pues les cuesta no facilitar la solución.

- Les gusta resolver problemas, el grado de motivación es suficiente para que el empeño que ponen en trabajar en los problemas sea observable. Han aceptado todos los problemas como un pequeño desafío. Cada día que tenemos intervención somos recibidos con alegría, cuando nos hemos visto obligados a cancelar alguna intervención nos han preguntado interesados por los motivos. Tenemos constancia de que hablan en casa sobre los problemas trabajados. Algunos alumnos nos han presen-

[14] En mayo de 2015 varios diarios británicos como The Telegraph o The Guardian se hacen eco de unas declaraciones del profesor de Ciencias del Aprendizaje, Guy Claxton, sobre la conveniencia de evitar la goma de borrar en las aulas. La presenta como una herramienta diabólica que perpetúa la vergüenza de haber cometido errores frente a la falsa apariencia de haber hecho las cosas bien a la primera. «Necesitamos una cultura donde los niños no tengan miedo de cometer errores, que miren sus errores y aprendan de ellos, donde estén continuamente reflejando y mejorando lo que han hecho» (los artículos pueden consultarse en: http://www.telegraph.co.uk/education/educationnews/11630639/Ban-erasers-from-the-classroom-says-academic.html; y https://www.theguardian.com/education/shortcuts/2015/may/27/ban-rubbing-out-professor-says-erasers-instrument-of-the-devil-guy-claxton).

tados a sus padres o abuelos a la salida o entrada del centro mostrando gratitud al hacerlo.

Capítulo 4

Análisis del Proceso de Resolución de Problemas en las aulas de 4.º de Educación Primaria

1. Introducción

En este capítulo se describe la secuencia de trabajo en las aulas de 4.º de Educación Primaria. Nos centraremos en los alumnos que ya participaron en la investigación en el capítulo 3. Ha sido el propio centro el que ha mostrado su interés en seguir con la intervención ya que observan un alto grado de motivación en los alumnos. La intervención está cumpliendo con sus propósitos: los niños van adquiriendo actitudes de comunicación y confianza en su propias posibilidades incluso cuando no llegan a resolver correctamente los problemas. Una vez adquirida a nivel individual una pauta de trabajo y una cierta disciplina a la hora de abordar y trabajar un problema, en este curso nos planteamos introducir más problemas diseñados para trabajar en grupo.

Consideramos que contamos con una actitud inicial adecuada por parte de los alumnos: nos han mostrado confianza, motivación y disposición para aprender, son curiosos y tienen gusto por los retos. La angustia ante la asignatura, y en particular ante los problemas, ha disminuido, y en algunos casos ha desaparecido. Los episodios de llanto y angustia que se dieron en algunas de las intervenciones iniciales no han vuelto a repetirse. Nos propusimos trabajar a lo largo del 4.º curso en la línea ya establecida en 3.º

Nuestro objetivo es trabajar aspectos heurísticos y metacognitivos: incitaremos a los alumnos a hacer esquemas, dibujos, considerar casos más sencillos que los planteados inicialmente. Pondremos también especial atención en los aspectos metacognitivos: les invitaremos a revisar el proceso de solución y evaluar lo adecuado de la solución obtenida, se les pedirá que antes de abordar el problema reflexionen sobre las dificultades que pueden tener, si consideran que lo saben hacer o no, y por qué opinan así. Sin perder de vista estos objetivos, cuando se detecte que las dificultades de comprensión conceptual de los contenidos matemáticos son importantes, actuaremos sobre ellas. Resumimos esta forma de trabajar en la tabla 4.1.

Creemos que un alumno consciente de sus capacidades y competencias está en mejor disposición para resolver un problema con éxito y para buscar la ayuda adecuada cuando lo requiera. Seguiremos haciendo hincapié en la verbalización y para ello, en la mayor parte de las sesiones, se trabajarán los problemas en grupos de cuatro alumnos. De esta forma la comunicación con los compañeros se hace imprescindible y se favorece el desarrollo de un espíritu flexible y crítico, que forma parte de las actitudes matemáticas que buscamos.

2. Descripción de la muestra de cuarto de Educación Primaria.

La configuración de los grupos no es exactamente la misma que la del curso anterior, pues ha habido alumnos que han abandonado el centro, otros que no han promocionado y también alumnos de nueva incorparación. La intervención se hizo sobre los grupos de clase con estos cambios, pero el análisis que presentamos en este capítulo se limita a los alumnos que ya analizamos en el capítulo 3. Al frente de los grupos A y B habrá nuevas tutoras y en el caso particular del grupo B el responsable de impartir las matemáticas será un maestro distinto del tutor. Los tres tienen plazas provisionales en el centro, y por lo tanto saben que lo más probable es que para el nuevo curso tendrán que cambiar de destino. Las características de los grupos A y B son diferentes y de ello hablaremos a continuación. La tutora del grupo C es la misma que el curso anterior.

La tutora y responsable de las matemáticas que está asignada al grupo A es una persona tranquila y muy paciente: nunca levanta la voz, se vale de un altavoz portátil que lleva colocado a modo de cinturón y el volumen que utiliza es el adecuado para que todos los alumnos oigan correctamente sin que en ningún momento necesite un tono de voz por

Tabla 4.1: Secuencia de resolución de problemas en grupo.

- Primer paso: Nos contamos el problema, nos hacemos una imagen mental del problema:
    - Hacemos un dibujo.
    - Hacemos una lista, un esquema, una tabla.
    - Diferenciamos la información importante o relevante de la que no lo es.
    - Intentamos relacionar el problema con lo que ya sabemos, con nuestro conocimiento de las situaciones del mundo real que se parecen a este problema o con otros problemas similares a este que ya hemos trabajado.
- Segundo paso: Expongo a mis compañeros de grupo el trabajo del punto anterior, y decidimos en grupo cómo resolver el problema, qué estrategias de resolución vamos a utilizar:
    - Hacemos un flujo de trabajo, una secuencia ordenada de los pasos que vamos a seguir, de nuestra estrategia de resolución.
    - Lo resolvemos por ensayo y error.
    - Buscamos un patrón de comportamiento.
    - Lo intentamos primero con números más pequeños, etc.
- Tercer paso: Hacemos los cálculos y vamos revisando en cada cálculo si tiene sentido el número obtenido y qué es ese número.
- Cuarto paso: Tomamos la pregunta del problema y los cálculos que hemos hecho y elaboramos la respuesta.
- Quinto paso: Revisamos en grupo el trabajo realizado y el resultado obtenido.
- Sexto paso: Pensamos si el problema nos ha resultado fácil o difícil y por qué y si es posible pensamos en lo que hemos hecho cuando nos hemos encontrado con un punto difícil. (Les indicamos que este punto es importante para el debate grupal).

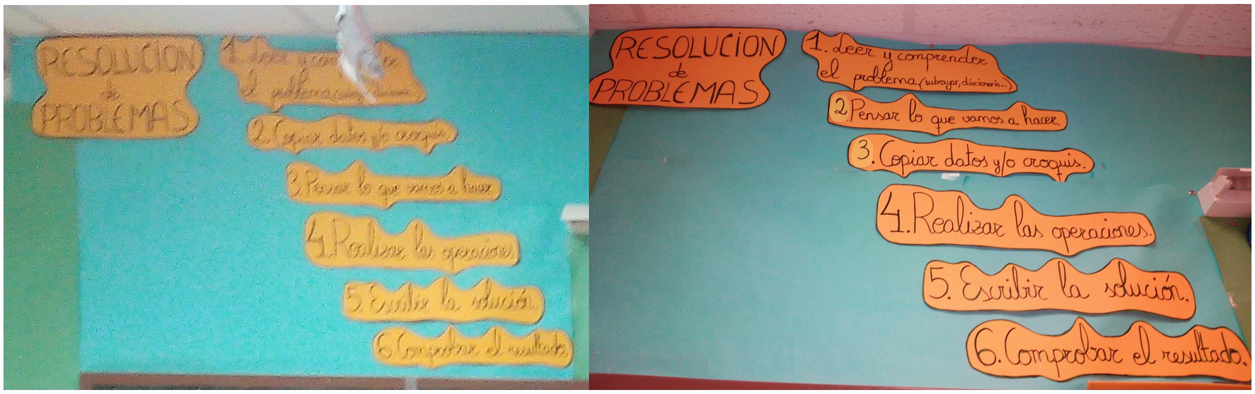


Figura 4.1: Secuencia inicial y final de resolución de problemas en el grupo A.

encima del agradable. Enseguida capta la idea de la secuencia de trabajo y se apunta a ella con convicción. A modo de recordatorio, y para que todos los alumnos tengan una visión directa del mismo, ha colocado un póster con su propuesta sobre las etapas de resolución de problemas. En la primera sesión del segundo cuatrimestre ella misma observa que «pensar y explicar cómo entiendo el problema y lo que voy a hacer» es muy importante y ha pensado que «debe cambiar el orden de la secuencia que propone el póster» (véase la figura 4.1). El día que toma esta decisión se dirige a los alumnos y la comenta con ellos en voz alta. A continuación, toma una silla y cambia el orden de las etapas: coloca por delante de «Copiar datos y/o croquis» la acción de «Pensar lo que vamos a hacer» al tiempo que les señala que es conveniente hacer un dibujo y un croquis en el que poner los datos. Las sesiones con este grupo a lo largo de este curso discurrirán con calma y serán bastante productivas; no trabajaremos muchos problemas pero sí se corregirán y discutirán en voz alta y el grado de participación de los alumnos es muy positivo. En ninguna de las sesiones de este curso estarán presentes los dos alumnos con necesidades educativas especiales.

En el grupo B, la persona a cargo de las matemáticas también transmite a los alumnos el interés que ella misma muestra en la sesión de resolución de problemas y es la primera en engancharse a los problemas. Por otro lado, su posición transitoria en el centro (está cubriendo una baja) no le permite arriesgarse a cambiar la estructura de las sesiones de clase fuera de la intervención: explica o lee el apartado del libro de texto y muestra cómo hacer los ejercicios correspondientes, los alumnos hacen alguno individualmente en su cuaderno y el resto, junto con algunos de los que figuran al final de la lección, se proponen como deberes para casa. El alumno hace estos ejercicios en su cuaderno; algunos se corrigen en la pizarra pero la mayor parte los corrige la maestra individualmente en casa el fin de semana. Esta dinámica es la que predomina en el centro en las aulas desde tercero en adelante. A lo largo de la intervención, las tutoras de los grupos A y C introducen alguna sesión de trabajo sobre problemas similar a las que desarrollamos. Por motivos de agenda de los maestros, en cada sesión del grupo B nos acompañarán dos maestros distintos que se dan el relevo: en la primera hora está con nosotros el maestro encargado de las sesiones de matemáticas y en la segunda hora estará la tutora del grupo.

3. Organización del trabajo en el aula. Descripción de las sesiones

Las sesiones de trabajo con estos grupos tienen lugar los viernes de semanas alternas y la duración es de 90 minutos pues hemos pedido al centro una reorganización de los horarios para facilitar el trabajo y corrección de los problemas en una misma sesión. Se introducen algunos cambios en la dinámica de trabajo:

- Iniciamos la sesión con una breve introducción de la investigadora sobre lo que vamos a trabajar y cómo. Esta lee el problema en voz alta y abre una breve discusión grupal sobre el problema, encaminada a la comprensión del enunciado y a facilitar la elaboración de la imagen mental del problema. La investigadora no juzgará en ningún momento ninguna de las ideas expuestas por los alumnos. Es una sesión de tormenta de ideas enfocada a la comprensión del enunciado, no a cómo resolver el problema.

- Se reparten las hojas de problemas, una por cada alumno y una hoja para los cálculos grupales o el trabajo en grupo del problema. Se pide a los alumnos que individualmente aborden el primer paso propuesto en la tabla 4.1.

- Se trabaja en grupo el problema y después cada alumno recoge la solución grupal en su hoja individual, con sus propias palabras y con total libertad para escoger la forma de plantear la solución.

- Se corrige en grupo en la sesión de clase y revisan los pasos 2 a 5 de la tabla 4.1.

- Se habla en grupo sobre los puntos difíciles del problema, y sobre cómo se han solventado.

En este capítulo recogemos el trabajo de siete fichas de problemas que se corresponden con doce semanas de intervención (mostramos un resumen en la tabla 4.2). A lo largo del curso 2015-2016 han sido nueve las fichas diseñadas y propuestas en 4.º de primaria, pero nos centramos en siete de ellas pues nos resultan especialmente significativas en cuanto a variedad de problemas planteados y actitudes observadas. Con objeto de facilitar la lectura y seguimiento de este documento, las fichas se han numerado en orden consecutivo y de acuerdo con el orden cronológico en el que se trabajaron. En dos de los grupos se había permitido grabar el audio y tomar alguna fotografía, pero el tutor del tercero de los grupos mostró su desacuerdo, lo transmitió al claustro y desde ese momento no se permitió tomar muestras sonoras ni fotográficas de las clases. La intervención se ha extendido desde el 23 de octubre de 2015 al 4 de abril de 2016.

Las sesiones con el grupo A tendrán lugar de 9:00 a 10:30, las del grupo B de 10:30 a 11:55 y las del grupo C de 12:30 a 14:00.

4. Análisis de la ficha 1

En esta ficha se trabajan cuatro problemas. Todos ellos corresponden al ámbito de números. El objetivo de esta primera sesión es recuperar la dinámica establecida el curso pasado. Por esta razón no seguimos el procedimiento descrito en el párrafo anterior sino que se procede tal y como se había estado haciendo a lo largo del curso anterior: toda la ficha se trabaja a nivel individual y se corrige colectivamente.

Breve descripción de los problemas de esta ficha:

- Problema 1: sobre este problema ya hemos hablado en el capítulo 2 (página 116) ya que las cinco cuestiones de este problema son las preguntas M031346A, M031346B, M031346C, M031379 y M031380 que forman parte del problema del «intercambio de cromos» de la prueba TIMSS 2011. El problema se encuadra dentro del bloque de números. El grado de dificultad de estas cinco cuestiones está bien pautado y abarca desde el dominio aplicar hasta el de razonar.

Tabla 4.2: Estructura de los dominios cognitivos y de contenidos trabajados en cada sesión.

Ficha 1	**P1**	Números-Aplicar Razonar Respuesta abierta Una y dos etapas	**P2**	Números Reconocimiento de patrones Aplicar-Respuesta abierta Una etapa	**P3**	Geometría Reconocimiento de patrones Aplicar Una etapa	**P4**	Números-Aplicar Respuesta abierta Una etapa
Ficha 2	**P1**	Números Conocer y aplicar						
Ficha 3	**P1**	Números Conocer y aplicar Respuesta abierta Dos etapas	**P2**	Números Conocer y razonar (macha atrás) Dos etapas (heurística de problemas)	**P3**	Números Razonar Reconocimiento de patrones Una etapa	**P4**	Números Aplicar Respuesta abierta Una etapa
Ficha 4	**P1**	Números Conocer y aplicar						
Ficha 5	**P1**	Números Conocer y aplicar						
Ficha 6	**P1**	Números Conocer y razonar (hacer un esquema, paso a paso) Dos etapas (heurística de problemas)						
Ficha 7	**P1**	Números Conocer y razonar (búsqueda exhaustiva) (Heurística de problemas)	**P2**	Números Conocer y razonar (búsqueda exhaustiva) (Heurística de problemas)	**P3**	Números Conocer y razonar (búsqueda exhaustiva) (Heurística de problemas)	**P4**	Números Conocer y razonar (búsqueda exhaustiva, ensayo y error) (heurística de problemas)

Fuente: elaboración propia.

- El problema número 2 es el ítem M051601 de la prueba TIMSS 2011, y se encuadra en la categoría de aplicar y en el bloque de números/reconocimiento de patrones. En la prueba TIMSS 2011 se pide dar una respuesta numérica a la pregunta «número de cerillas necesarias para construir el cuarto término de la serie» y se facilitan los tres primeros términos de la serie. En este caso les hemos pedido que dibujen el cuarto y quinto término de la serie y que indiquen el número de cerillas necesario para formar cada uno de ellos. Nuestro objetivo es llegar a una regla general.

- El problema número 3 es un problema del libro de 1.º de Educación Primaria «+ideas -cuentas» (Ramos, 2015). Hemos propuesto este problema porque el curso anterior al trabajar con los alumnos de segundo observamos que tenían serias dificultades tanto para construir la figura como para estimar a priori el número de piezas necesarias para ello y queríamos averiguar si estas dificultades se dan también en cursos superiores. En el problema hay que determinar el número de cubos unitarios necesarios para construir las figuras tridimensionales que se proponen. A los alumnos de primero y segundo se les dejan los bloques a mano para reproducir las construcciones o para comprobar que su respuesta es correcta. En este caso les hemos mostrado físicamente la pieza que se reproduce en la figura y la hemos dejado a la vista de todos los alumnos encima de la mesa de la maestra.

- El problema número 4 es el ítem M041098 de TIMSS 2011, el problema de las latas de pintura. En este problema se plantea la comprensión de la división como «medida o cuota» e interpretar el resto de acuerdo con el contexto del problema, tal y como ya explicamos en el capítulo 2.

La ficha va acompañada de una breve encuesta en la que se pide al alumno que valore los siguientes aspectos para cada uno de los problemas (en el caso del problema número uno se le pide que valore las preguntas 1 a 3 en su conjunto):

1. Este problema me ha resultado: a) difícil, b) de dificultad media, c) fácil.

2. Creo que tengo el problema: a) bien resuelto, b) podría tenerlo bien resuelto, c) no lo tengo bien resuelto.

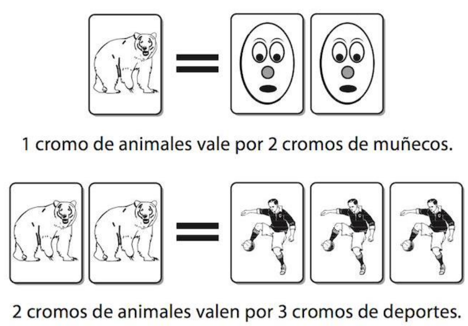
3. Al leer el problema: a) he entendido lo que me pedía el enunciado, b) no me ha quedado muy claro el enunciado pero lo he resuelto, c) no he entendido el enunciado.

La corrección se hace en la misma sesión después del trabajo de los alumnos. Corregir el primer problema con todos sus apartados llevará mucho tiempo y en esta primera sesión no se puede abordar la corrección del resto de los problemas por lo que se pospone para una segunda sesión. En la segunda sesión, como ya se cuenta con la revisión por parte de la investigadora del trabajo inicial de los alumnos, se introducirán algunos cambios en la dinámica de trabajo tal y como comentamos más adelante y siguiendo el marco metodológíco establecido: el análisis de lo acontecido en una sesión nos permite modificar y adaptar las sesiones siguientes para confirmar nuestra conjetura de trabajo. El análisis que se presenta en este apartado trata de forma conjunta lo acontecido durante las dos sesiones de clase y la revisión del trabajo escrito de los alumnos por parte de la investigadora. Contamos con las respuestas de 51 alumnos.

4.1. Ficha 1 - Problema 1

Como hemos explicado, esta pregunta forma parte del conjunto de preguntas liberadas de TIMSS 2011. La prueba en nuestro país tiene lugar cuando los alumnos están próximos a concluir el curso de 4.º, mientras que nuestros alumnos responden a esta ficha cuando solo han transcurrido seis semanas desde el inicio de curso.

En la feria del pueblo había un puesto donde la gente podía cambiar cromos:



Algunos niños fueron al puesto a cambiar cromos.

1. Berta tenía 5 cromos de animales para cambiarlos por cromos de muñecos. ¿Cuántos cromos de muñecos obtendría?

2. Jaime tenía 8 cromos de animales para cambiarlos por cromos de deportes. ¿Cuántos cromos de deportes obtendría?
3. Catalina tenía 6 cromos de animales. Los quería cambiar por tantos como fuera posible.
    - ¿Cuántos cromos de muñecos obtendría?
    - ¿Cuántos cromos de deportes obtendría?
    - ¿Debería cambiarlos por cromos de muñecos o por cromos de deportes?
4. Esteban tenía 15 cromos de deportes para cambiarlos por cromos de animales. ¿Cuántos cromos de animales obtendría?
5. Antonio tenía 8 cromos de muñecos para cambiarlos por cromos de deportes. ¿Cuántos cromos de deportes obtendría?

Análisis de las respuestas y de la corrección grupal

Solo dos niños han llegado a resolver correctamente todas las cuestiones que plantea esta pregunta. Además han explicado el por qué de sus respuestas. Cuando estábamos corrigiendo la última cuestión, uno de ellos se dio cuenta de que su solución no es correcta, y con un expresivo «¡Ahí va!, lo hice mal» nos informó a todos sobre ello. Nos contó el porqué de su solución escrita: «yo he pensado que como dos cromos de muñecos son uno de osos, siempre tengo un número impar de cromos de osos y entonces no puedo cambiar todos los cromos de osos que tenga por cromos de fútbol. Pero tengo cromos pares de osos» (C2. P16). Le pedimos que terminara de resolvernos el problema. Su respuesta finalmente se contabiliza como correcta aunque no se refleje así en su hoja de problemas (figura 4.5).

Esta forma de proceder nos congratula y felicitamos públicamente al alumno por su desempeño, pues denota que está activo, está revisando su trabajo frente a lo que se está proponiendo en este momento y es participativo.

Hay tres alumnos más que han llegado a contestar correctamente las cuatro primeras cuestiones del problema y han dejado en blanco o bien han contestado mal el último apar-

Figura 4.2: Ficha 1. Problema 1. Corrección grupal.

tado. Tenemos 36 que han contestado bien a la primera pregunta y 32 que lo han hecho al primer apartado de la tercera pregunta (estas dos preguntas son semejantes). Diez alumnos han contestado bien a la segunda pregunta y nueve han respondido correctamente a su equivalente, el segundo apartado de la tercera pregunta. Preguntados los alumnos por la diferencia entre unas y otras cuestiones nos responden que son iguales, pero que para una hay que mirar la primera línea del dibujo y para la otra la segunda. Ninguno de los alumnos llegó a concluir que el enunciado presentaba distintos valores de cambio.

I: ¿Cómo que son iguales?, si yo tengo tres cromos de animales y los quiero cambiar por cromos de muñecos, ¿cuántos cromos de muñecos me van a dar?, y si estos tres cromos de animales los quiero cambiar por cromos de deportes, ¿cuántos cromos me van a dar? (dirigiéndose a un alumno que ha respondido bien a la primera pregunta pero no así a la segunda).

A3: ¿Cuántos cromos de animales tienes?

I: Tengo tres cromos de animales (lo escribe en la pizarra, el enunciado está proyectado en la pizarra digital).

A3: Ah, te dan seis cromos de muñecos y nueve cromos de deportes.

A1: Ala, eso está mal. No puedes cambiar los cromos por cromos de deportes. No son pares.

A3: ¿Eh?, tres cromos de animales por tres de deportes, te dan nueve cromos de deportes.

A7: No porque sólo puedes cambiar de dos en dos y si dos son tres entonces sólo puedes cambiar dos cromos y que te dan tres de deportes y el otro no lo cambias.

I: ¿Quién está de acuerdo con lo que nos dice A7?

A8: ¿Pero hay que cambiar todos los cromos, o sólo los que pueda?

I: Esa es una pregunta muy interesante, el enunciado no nos dice nada, ¿qué pensáis?

A2: Si quiere cambiar, los puede cambiar.

A9: Pero yo creo que siempre tiene uno más, y no importa por lo que cambia.

I: Vamos por partes, porque estáis viendo el problema de forma diferente, A9, si lo hacemos como tú dices, ¿cómo podemos entender lo que dice debajo de cada dibujo?, debajo del primer dibujo dice «un cromo de animales vale por dos de muñecos» y debajo del segundo dice «dos cromos de animales valen por tres cromos de deportes».

A9: Sí pero es lo mismo que dice el dibujo.

I: (No ha sido una buena pregunta). ¿Y entonces, da igual cambiar por cromos de deportes que por cromos de muñecos?, ¿tú no crees que lo que me está diciendo es que no todos los cromos tienen el mismo valor?, que hay cromos más difíciles de conseguir que otros, que valen más unos que otros y por eso se necesita distinta cantidad de cromos para hacer el cambio.

A9: Vale. Entonces lo tengo mal. (No dice nada más y permanece atento a la solución de su compañero). (A7 sale a resolver el problema haciendo uso de dibujos, figura 4.2). (C1. P16)

El alumno A9, al igual que nos sucedió con el test oficial, ha interpretado el enunciado como los términos de una serie, siendo el patrón de construcción «uno más» a ambos lados de la igualdad, de esta forma el siguiente elemento de la serie es «tres cromos de animales se cambian por cuatro de cualquier otra cosa». Este razonamiento se ha dado en otros cuatro alumnos de otros grupos. Observamos que esta forma de proceder se da en alumnos que tienen una buena capacidad de resolución de problemas, y que por ejemplo llegan a explicar correctamente cómo resolver otros problemas de la hoja, en particular el de las cerillas y la construcción de bloques que analizaremos más adelante. Son alumnos con buena capacidad para detectar patrones, aunque no han sabido interpretar el patrón

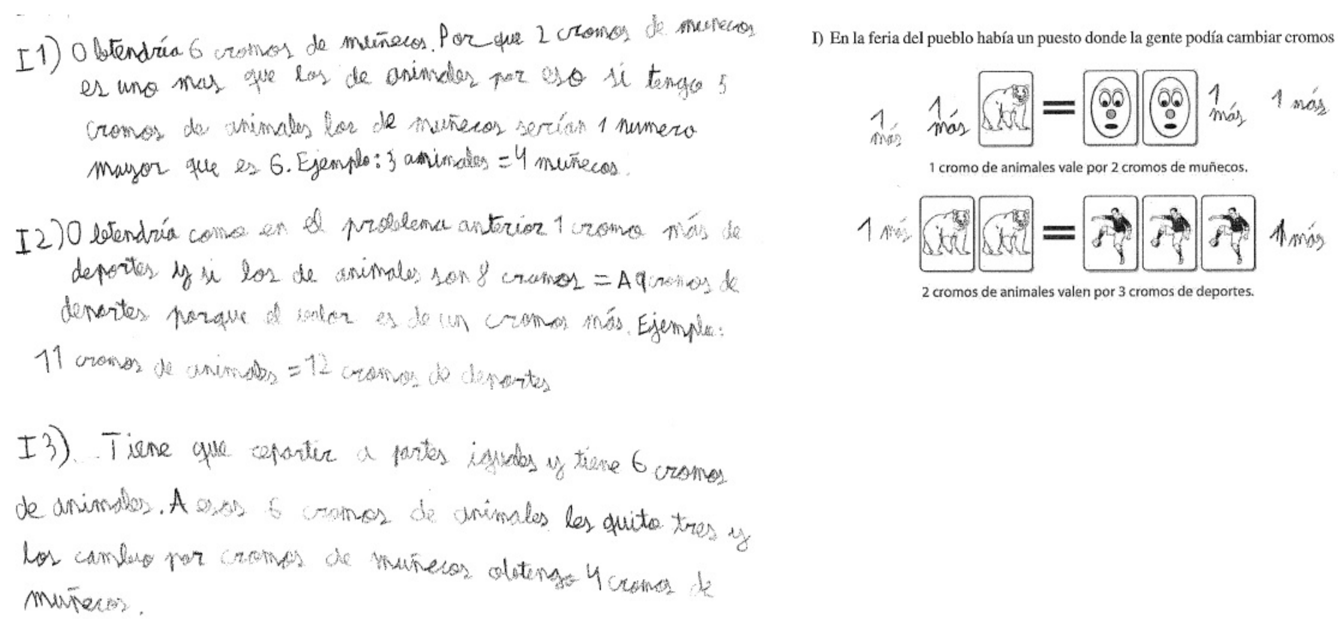


Figura 4.3: Ficha 1. Problema 1. Solución errónea, búsqueda de un patrón aditivo.

de proporcionalidad que presenta este problema y en su lugar lo han interpretado como un patrón aditivo (figura 4.3).

Las estructuras multiplicativas tienen algunos aspectos en común con las estructuras aditivas y es a estos a los que se recurre para introducir la multiplicación como «suma repetida», pero también tiene otros aspectos como son los combinatorios «con seis camisetas y siete pantalones. ¿De cuántas formas diferentes me puedo vestir?», o el de razón que muestra el enunciado de este problema, «2 cromos de animales valen por 3 de deportes» que estos alumnos no han sabido interpretar.

Son varios los autores que señalan que la construcción del significado de razón requiere de un cambio cualitativo en los esquemas cognitivos de los alumnos (Fischbein, Deri, Nello, y Marino, 1985; Greer, 1994a, 1994b; Clark and Kamii, 1996) y este cambio se produce paulatinamente con la experiencia. En los primeros años los alumnos tienden a utilizar estructuras aditivas (Hart, 1981). Van Dooren, de Bock and Verschaffel (2010) y Férnandez y Llinares (2010) observaron que en estadios intermedios los alumnos aplican simultáneamente razonamientos aditivos erróneos para resolver situaciones de proporcionalidad y razonamientos de proporcionalidad a problemas aditivos.

En nuestro caso concreto es difícil a partir de las entrevistas con los alumnos seguir su proceso de evaluación de un patrón a otro pues el grado de comprensión sobre las operaciones de los alumnos es bajo. El paso de patrón aditivo al multiplicativo requiere de entender el proceso de «multiplicado por».

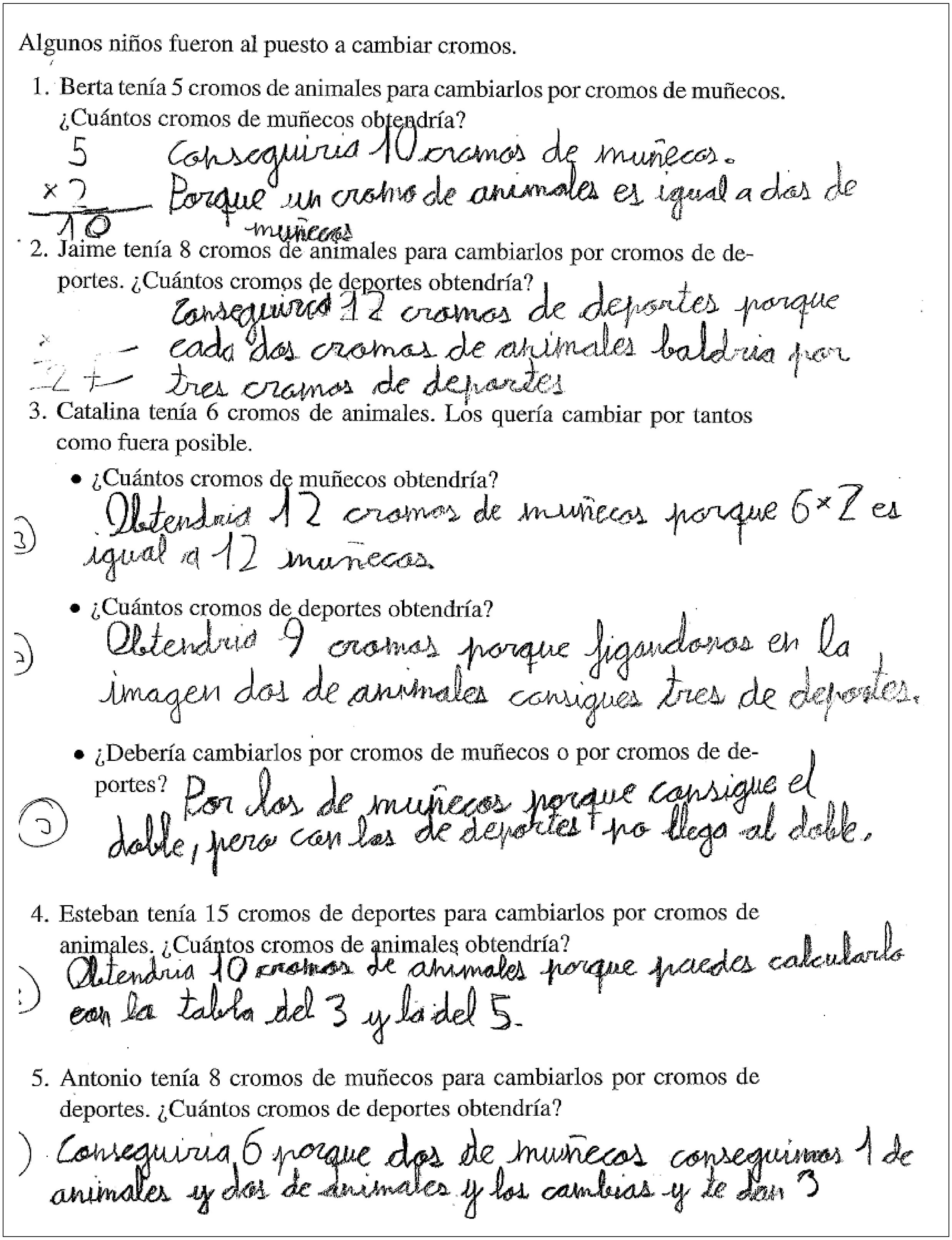
En las figuras 4.4, 4.5 y 4.6 podemos ver algunos ejemplos de soluciones correctas.

En esta primera sesión hemos procedido con la corrección tal y como lo hacíamos el curso pasado. Sale un niño a corregir a la pizarra y nos explica su procedimiento, se pide después otras formas de resolver el problema y se discuten en grupo (figura 4.2).

Solo hemos encontrado dos estrategias de resolución: la de los niños que lo resuelven a partir de conteo valiéndose de una representación pictórica, como se observa en las fotos de la figura 4.7, y los razonamientos aritméticos de carácter multiplicativo.

Corregir este problema llevó mucho tiempo, hubo una gran cantidad de niños que no comprendieron las diferencias entre su propuesta de resolución y la que estábamos planteando como correcta. Optamos por no corregir el problema siguiendo el orden de los apartados: una vez corregido la primera pregunta pasamos al primer apartado de la tercera pregunta; en este último caso se preguntó a algunos alumnos que no habían sabido inicialmente resolver estas cuestiones si encontraban algún parecido entre ellas y de ser así que nos lo explicaran. Procedimos de igual manera con la segunda pregunta y el segundo apartado de la tercera. Entre estos alumnos, salvo uno que dijo no saberlo hacer, los demás resolvieron los apartados correctamente imitando la solución gráfica de sus compañeros, pero tuvieron muchos más problemas para transformar la estrategia gráfica en una solución aritmética.

En este caso, resolver el problema mediante la ayuda de un dibujo se muestra como claramente beneficioso. En los grupos B y C pudimos observar cómo las maestras dieron su aprobación a la resolución propuesta por los alumnos en términos gráficos pero en ambas aulas les pidieron que escribieran las cuentas, que transformaran su razonamiento en una expresión aritmética. Una gran parte de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas va encaminada a la comprensión y dominio de la notación formal. Ahora bien, hay que asegurarse de que estos procesos de enseñanza y aprendizaje están basados en la comprensión de los conceptos. El uso de dibujos o diagramas no es simplemente un apoyo visual, sino que es una solución alternativa válida para resolver problemas. La prisa que tenemos por abandonar los razonamientos basados en la manipulación para pasar al lenguaje abstracto y concreto de las matemáticas está provocando que no le prestemos la necesaria atención a los problemas de comprensión que ocasiona esta forma de proceder. Además, parece existir la idea de que «un buen procedimiento de resolución» siempre



Algunos niños fueron al puesto a cambiar cromos.

1. Berta tenía 5 cromos de animales para cambiarlos por cromos de muñecos. ¿Cuántos cromos de muñecos obtendría?

$$\begin{array}{r} 5 \\ \times 2 \\ \hline 10 \end{array}$$

Conseguiría 10 cromos de muñecos.
Porque un cromo de animales es igual a dos de muñecos

2. Jaime tenía 8 cromos de animales para cambiarlos por cromos de deportes. ¿Cuántos cromos de deportes obtendría?

Conseguiría 12 cromos de deportes porque cada dos cromos de animales baldría por tres cromos de deportes

3. Catalina tenía 6 cromos de animales. Los quería cambiar por tantos como fuera posible.

- ¿Cuántos cromos de muñecos obtendría?

Obtendría 12 cromos de muñecos porque 6×2 es igual a 12 muñecos.

- ¿Cuántos cromos de deportes obtendría?

Obtendría 9 cromos porque fijandonos en la imagen dos de animales consigues tres de deportes.

- ¿Debería cambiarlos por cromos de muñecos o por cromos de deportes?

Por los de muñecos porque consigue el doble, pero con los de deportes no llega al doble.

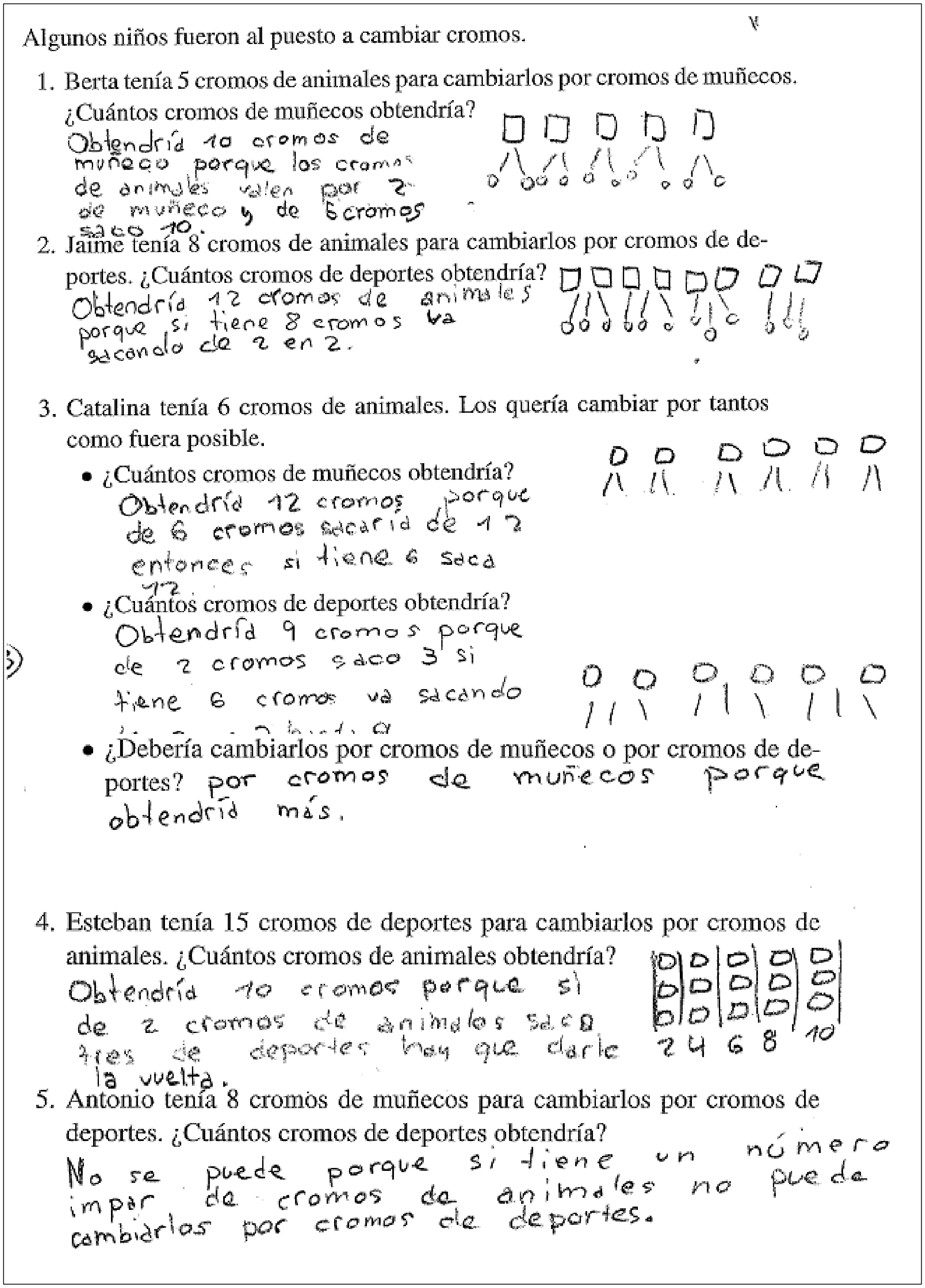
4. Esteban tenía 15 cromos de deportes para cambiarlos por cromos de animales. ¿Cuántos cromos de animales obtendría?

Obtendría 10 cromos de animales porque puedes calcularlo con la tabla del 3 y la del 5.

5. Antonio tenía 8 cromos de muñecos para cambiarlos por cromos de deportes. ¿Cuántos cromos de deportes obtendría?

Conseguiría 6 porque dos de muñecos conseguimos 1 de animales y dos de animales y los cambias y te dan 3

Figura 4.4: Ficha 1. Problema 1. Solución correcta del alumno 4A-2.



Algunos niños fueron al puesto a cambiar cromos.

1. Berta tenía 5 cromos de animales para cambiarlos por cromos de muñecos. ¿Cuántos cromos de muñecos obtendría?

   Obtendría 10 cromos de muñeco porque los cromos de animales valen por 2 de muñeco y de 5 cromos saco 10.

2. Jaime tenía 8 cromos de animales para cambiarlos por cromos de deportes. ¿Cuántos cromos de deportes obtendría?

   Obtendría 12 cromos de animales porque si tiene 8 cromos va sacando de 2 en 2.

3. Catalina tenía 6 cromos de animales. Los quería cambiar por tantos como fuera posible.

   - ¿Cuántos cromos de muñecos obtendría?

     Obtendría 12 cromos porque de 6 cromos sacaría de 12 entonces si tiene 6 saca 12

   - ¿Cuántos cromos de deportes obtendría?

     Obtendría 9 cromos porque de 2 cromos saco 3 si tiene 6 cromos va sacando [illegible]

   - ¿Debería cambiarlos por cromos de muñecos o por cromos de deportes? por cromos de muñecos porque obtendría más.

4. Esteban tenía 15 cromos de deportes para cambiarlos por cromos de animales. ¿Cuántos cromos de animales obtendría?

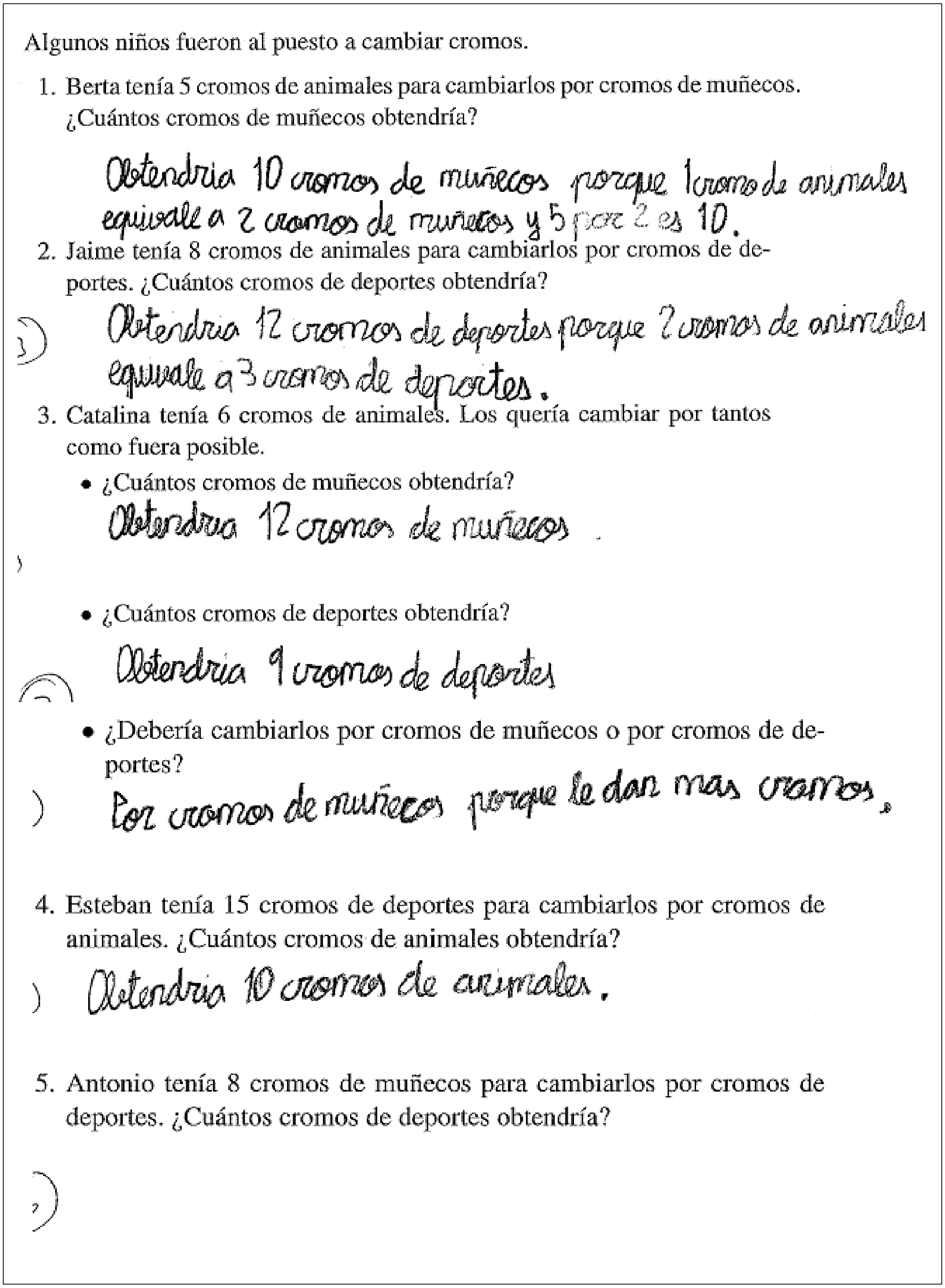
   Obtendría 10 cromos porque si de 2 cromos de animales saco tres de deportes hay que darle la vuelta.

   2 4 6 8 10

5. Antonio tenía 8 cromos de muñecos para cambiarlos por cromos de deportes. ¿Cuántos cromos de deportes obtendría?

   No se puede porque si tiene un número impar de cromos de animales no pueda cambiarlos por cromos de deportes.

Figura 4.5: Ficha 1. Problema 1. Solución correcta del alumno 4C-11.



Algunos niños fueron al puesto a cambiar cromos.

1. Berta tenía 5 cromos de animales para cambiarlos por cromos de muñecos. ¿Cuántos cromos de muñecos obtendría?

   Obtendria 10 cromos de muñecos porque 1cromo de animales equivale a 2 cromos de muñecos y 5 por 2 es 10.

2. Jaime tenía 8 cromos de animales para cambiarlos por cromos de deportes. ¿Cuántos cromos de deportes obtendría?

   Obtendria 12 cromos de deportes porque 2 cromos de animales equivale a 3 cromos de deportes.

3. Catalina tenía 6 cromos de animales. Los quería cambiar por tantos como fuera posible.

   - ¿Cuántos cromos de muñecos obtendría?

     Obtendria 12 cromos de muñecos .

   - ¿Cuántos cromos de deportes obtendría?

     Obtendria 9 cromos de deportes

   - ¿Debería cambiarlos por cromos de muñecos o por cromos de deportes?

     Por cromos de muñecos porque le dan mas cromos.

4. Esteban tenía 15 cromos de deportes para cambiarlos por cromos de animales. ¿Cuántos cromos de animales obtendría?

   Obtendria 10 cromos de animales.

5. Antonio tenía 8 cromos de muñecos para cambiarlos por cromos de deportes. ¿Cuántos cromos de deportes obtendría?

Figura 4.6: Ficha 1. Problema 1. Solución correcta del alumno 4B-13.

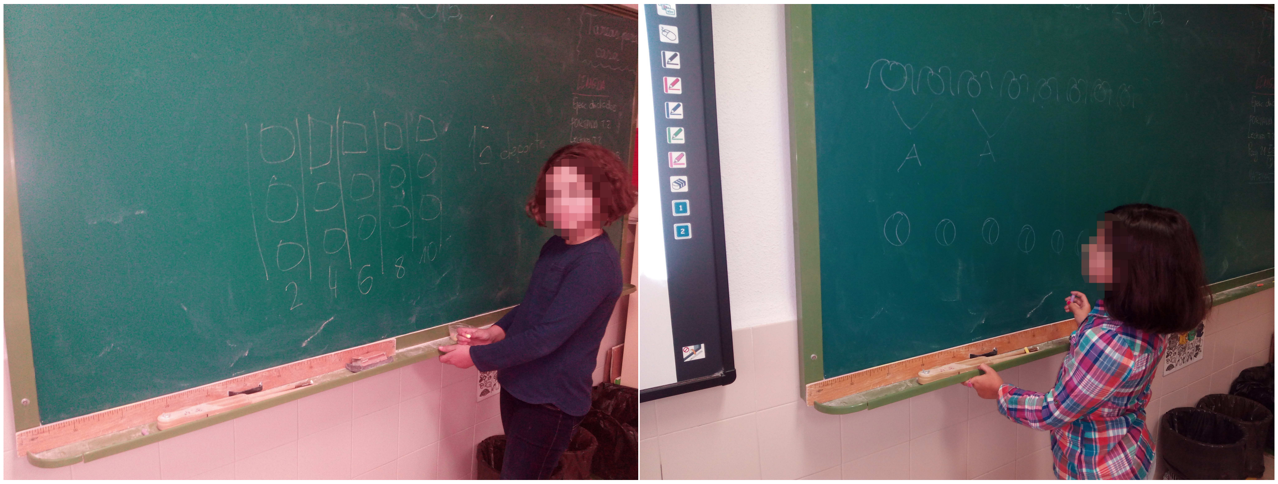


Figura 4.7: Ficha 1. Problema 1. Resolución a partir de distintas representaciones pictóricas.

requiere escribir una operación aritmética.

El apartado número 5 les ha resultado especialmente difícil. Para dar respuesta a este último apartado hay que analizar en conjunto la información suministada por las dos líneas del enunciado. Se trata de un problema de dos etapas, pero al trabajar con los niños nos hemos dado cuenta de que en sentido estricto serían cuatro etapas pues dentro de cada una de las dos etapas principales se da una subetapa de transformación (expresar en términos de parejas los cromos obtenidos en cada una de estas etapas principales). Proponemos para este apartado del problema el siguiente esquema estructural en el que se identifican tres componentes latentes: parejas de cromos de muñecos, cantidad de cromos de animales y parejas de cromos de animales. En el esquema de la figura 4.8 hemos intregrado las principales dificultades con las que se encuentra el alumno; el análisis de lo acontecido durante la resolución grupal nos permite clasificar estas dificultades de acuerdo con la fase de resolución del problema. Las hemos agrupado en tres categorías que no solo son aplicables a este apartado concreto sino a cada uno de los apartados del problema. Por tanto, podemos decir que son dificultades propias del tipo de problema planteado:

- Dificultades de carácter sintáctico: debidas a la forma en la que se presentan los datos y la secuencia de presentación. Estas dificultades aparecen ya desde la primera visualización del enunciado y se confirman con la lectura.

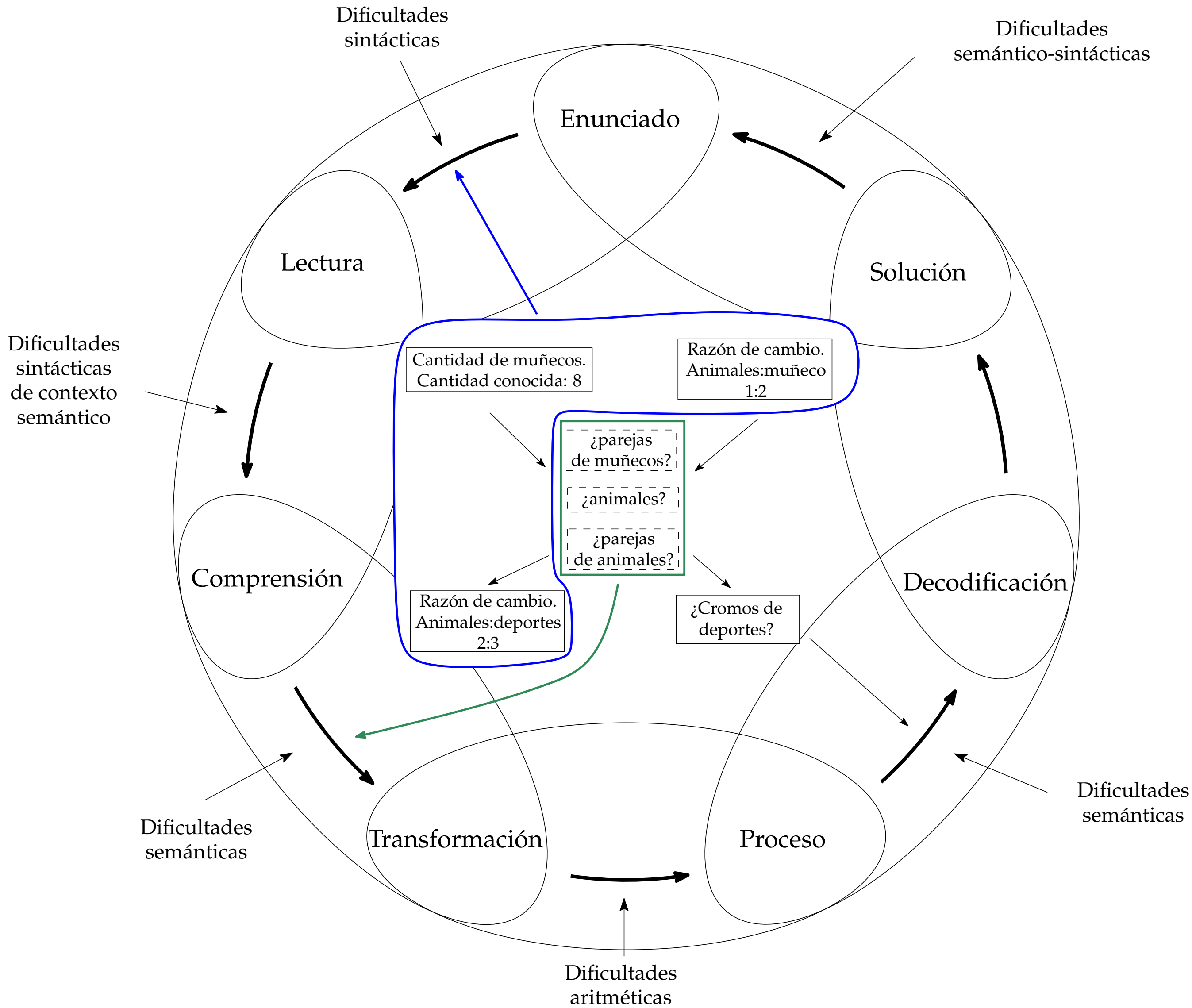


Figura 4.8: Ficha 1. Problema 1. Estructura semántica del problema y clasificación de las dificultades del problema.

Hemos observado que muchos alumnos no han sabido interpretar la información que aporta el dibujo, y tampoco han sabido interpretar la leyenda que aparece al pie de cada una de las líneas de dibujo y que no es más que la transcripción a texto de lo expresado en el dibujo. Para algunos alumnos este «exceso de información» ha sido irrelevante, pues aquellos que por ejemplo han interpretado el enunciado como términos de una serie cuya regla de formación es «obtengo uno más» no entendían el propósito del texto.

- Dificultades de carácter semántico: en la segunda fase de resolución, la de comprensión del enunciado, se dan dificultades de carácter semántico que derivan del vocabulario matemático empleado y del proceso o razonamiento matemático necesarios para comprender el problema. También hemos observado otras dificultades que podríamos decir que tienen una naturaleza mixta: a los problemas de comprensión sintáctica se unen los de comprensión semántica. A este último tipo responden las dificultades que encuentran los niños para interpretar el canje que propone el enunciado y no asignar al signo igual el significado de equivalencia o el «valen por» que figura expresamente en el enunciado. Estas son también las dificultades que les llevan a considerar que les faltan datos para dar respuesta a la última pregunta, en el apartado 5. Cuando les hemos preguntado por el dato que ellos creen que falta en el problema, casi la mitad de los alumnos no han sabido contestar pues decían no entender el problema y el 15 % de los alumnos nos han dicho que necesitaban saber cómo se cambian los cromos de animales por cromos de deportes.

- Por último, las dificultades de procedimiento que se manifiestan durante la fase de transformación y que están relacionadas con la falta de sentido numérico de los alumnos. Son aquellas que les llevan a entender que por 8 cromos de animales se pueden obtener 24 cromos de deportes.

Finalmente, con ayuda de la pizarra digital exponemos la secuencia de cambio que se muestra en la figura 4.9. Esta actividad la hacemos solo en el aula A, pues es la única en la que estamos convencidos de haber conseguido que todos los niños pudieran establecer un relato coherente del problema.

En cuanto a la percepción de los alumnos sobre la dificultad de este problema y el grado de comprensión del enunciado, la encuesta nos arroja los siguientes resultados promedios para las respuestas 1 a 3[1]. Muchos alumnos han hecho referencia expresa a la pregunta 5 diciendo: «no lo entiendo». Tanto los que han respondido correctamente como los que han interpretado erróneamente el signo igual, sin entender el significado de equivalencia del que ya hablamos en el capítulo 2, consideraron que las preguntas 1 a 3 eran fáciles y asequibles y que entendían correctamente el enunciado, en la tabla 4.3. Interpretar el problema como una sencilla multiplicación y en términos de proporcionalidad no solo les

[1]Hacemos esta diferenciación pues al comprobar el número de respuestas en blanco o erróneas que obteníamos para la pregunta número 5 se les hizo una observación a los alumnos cuando respondían al test.

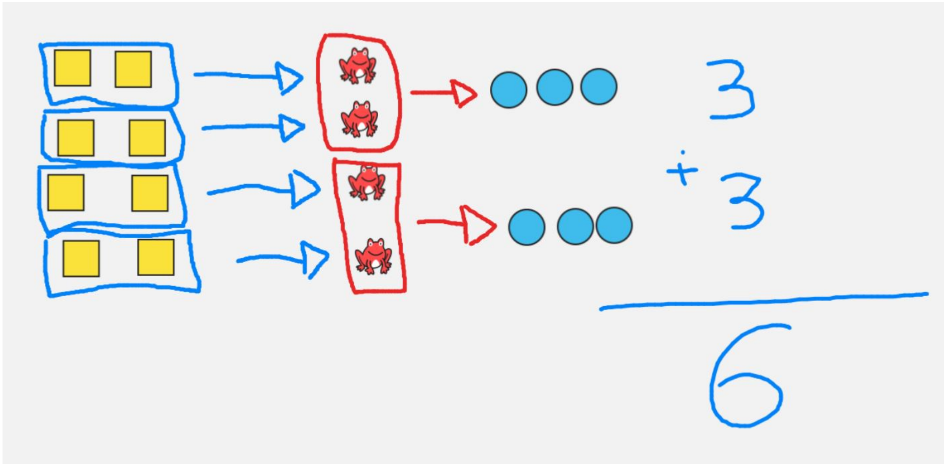


Figura 4.9: Ficha 1. Problema 1. Secuencia de cambio apartado 5.

Tabla 4.3: Ficha 1. Problema 1. Encuesta sobre los procesos metacognitivos.

Enunciado		Dificultad		Respuesta correcta	
Entiendo el enunciado	70,3%	Fácil	48,6%	Bien resuelto	35,1%
No lo entiendo pero lo he hecho	11,7%	Dificultad media	31,5%	Podría tenerlo bien resuelto	43,2%
No lo entiendo	1,8%	Difícil	4,5%	No está bien	4,5%
No contesta	16,2%	No contesta	15,3%	No contesta	17,1%

Fuente: elaboración propia.

lleva a resolverlo mal sino también a valorar el grado de dificultad de forma errónea, a creer que lo saben hacer cuando no es así.

Para dar respuesta a esta situación se nos plantea una vez más la importancia de revisar con el alumno la respuesta que da al problema, trabajando el sentido numérico. En el aula B les preguntamos a los alumnos si a ellos les parecía un buen cambio el que te da 24 cromos de deportes a cambio de solo 8 de animales, al tiempo que en una mano mostrábamos 8 cartas de una baraja numérica y en la otra 24. Acompañamos esta teatralización del siguiente discurso: «claro, como $8 \times 3 = 24$ entonces, ¿por qué no obtienes 6 cromos de deportes por 2 de animales ya que $2 \times 3 = 6$ en lugar de obtener 3 cromos de deportes como dice el enunciado?». Pero claramente podemos concluir que frente a este discurso argumentativo de contenido verbal, fue el discurso manipulativo y gráfico el que nos ayudó a resolver las dudas de los alumnos.

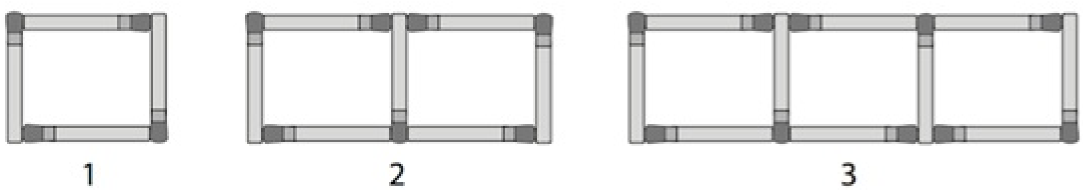
4.2. Ficha 1 - Problema 2

Carlos tiene que formar con cerillas las figuras 1 a 4.

Las figuras 1, 2 y 3 se muestran a continuación.

Necesita cuatro cerillas para formar la figura 1, siete cerillas para formar la figura 2, y diez cerillas para formar la figura 3. Carlos sigue la misma regla cada vez para formar la siguiente figura de la serie.

¿Cuántas cerillas serán necesarias para formar la figura 4? Si formara la figura número 5 ¿cuántas cerillas serían necesarias para ello?

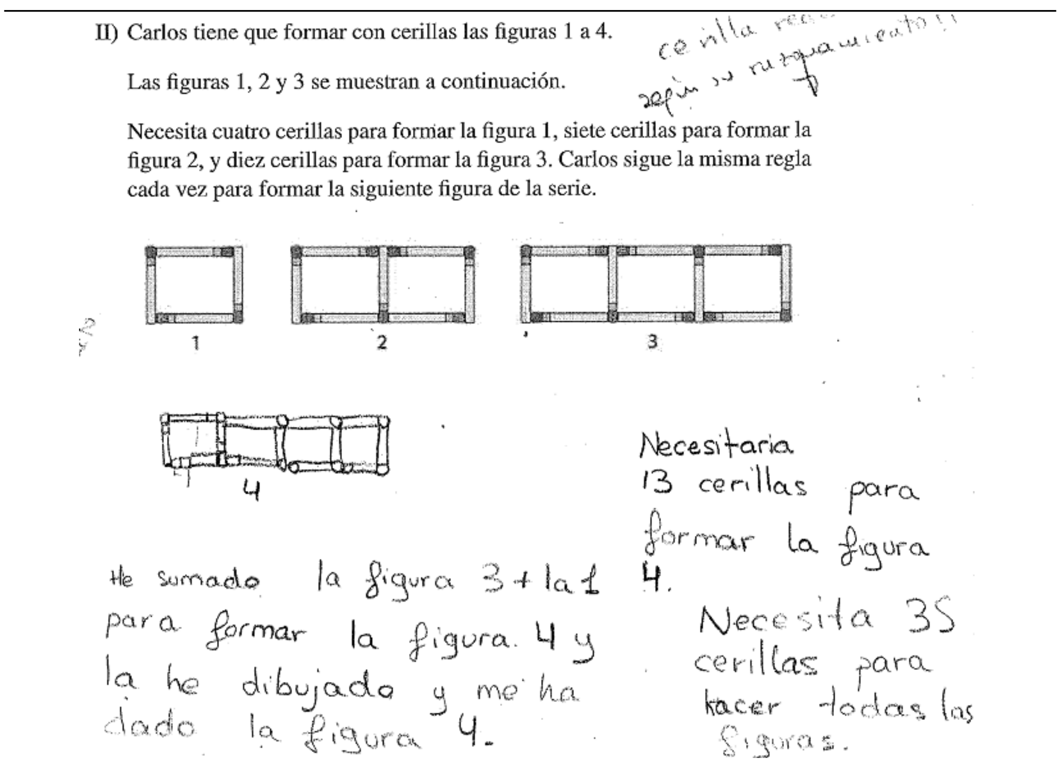


La corrección de este problema y el resto de los de la hoja se abordó en la segunda sesión; para entonces la investigadora ya había corregido las respuestas individuales y se optó por dejar a los alumnos trabajar en grupo los problemas durante un breve espacio de tiempo y después corregir grupalmente. Se configuraron grupos de cuatro o cinco alumnos lo más heterogéneos posibles, se leyó el enunciado en voz alta y se proyectó en la pizarra el enunciado. Los alumnos no dispusieron de una nueva copia del enunciado salvo en la clase B donde no se dispone de pizarra digital y por tanto se entregó una copia de los enunciados a cada grupo.

En los trabajos individuales de los alumnos contamos con 20 respuestas correctas. 15 de estos alumnos han recurrido a dibujar los términos 4 y 5 de la serie y a contar las cerillas, pero solo dos de ellos han dado con el término general. Entre los 5 niños que han recurrido a razonamientos numéricos solo hay un niño que ha explicado cómo obtendría el término general. Tenemos 8 alumnos que tan solo han dibujado los términos de la serie pero no han contestado al número de cerillas necesarias para construirlos. Y hay 10 alumnos que han dado una respuesta errónea, como contestar cuántas cerillas se necesitan en total para construir las figuras 1 a 3 que aparecen dibujadas o decir que serán necesarias 24 cerillas pero no explican el porqué. También hay un importante número de niños que considera que son necesarias 4 cerillas para cada una de las celdas que forman las figuras y argumentan que la solución se obtiene «multiplicando 4 por el número que quieres construir» (C3. P18). Como ya habíamos observado al corregir este problema en el capítulo 2, a algunos de estos alumnos les costó cambiar de opinión y aceptar la respuesta de sus compañeros, que necesitaron recurrir a material manipulativo, como palillos o pinturas, para conseguir un argumento más convincente que el simple dibujo.

Observamos que al comenzar a trabajar en el problema había un buen número de alumnos que reproducían sin dificultad los términos de la serie, de forma mecánica, pero al preguntarles cuál sería la diferencia entre el término que acababan de construir y el siguiente no sabían responder y necesitaban construir la configuración y contar las cerillas. En cambio, todos los niños que habían respondido correctamente al problema supieron explicar una vez observada la serie que la diferencia de un término a otro consiste en añadir tres cerillas. Un alumno nos dijo que también se podía conseguir «juntando el primero más el anterior al que quieres hacer y quitando una cerilla» (C2- P18). En la figura 4.10 se muestran distintas respuestas.

Alumno 4A-13


II) Carlos tiene que formar con cerillas las figuras 1 a 4.

Las figuras 1, 2 y 3 se muestran a continuación.

Necesita cuatro cerillas para formar la figura 1, siete cerillas para formar la figura 2, y diez cerillas para formar la figura 3. Carlos sigue la misma regla cada vez para formar la siguiente figura de la serie.

1 2 3

4

Necesitaria 13 cerillas para formar la figura 4.

He sumado la figura 3 + la 1 para formar la figura 4 y la he dibujado y me ha dado la figura 4.

Necesita 35 cerillas para hacer todas las figuras.

Alumno 4A-9

II) Carlos tiene que formar con cerillas las figuras 1 a 4.

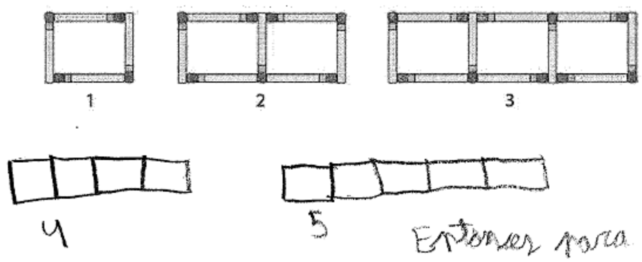
Y comprueba su solución!!

Las figuras 1, 2 y 3 se muestran a continuación.

Razonamiento abstracto.

Necesita cuatro cerillas para formar la figura 1, siete cerillas para formar la figura 2, y diez cerillas para formar la figura 3. Carlos sigue la misma regla cada vez para formar la siguiente figura de la serie.

3



Entonces para la figura 5 se necesitan 3 más que son 16 cerillas

Para la figura numero 4 se necesitan 13 cerillas porque para la de 3 se necesitan 3 cerillas menos y el orden es de 3 cerillas

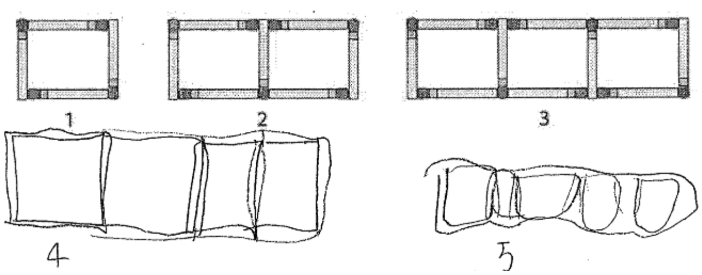
Alumno 4A-12

II) Carlos tiene que formar con cerillas las figuras 1 a 4.

Las figuras 1, 2 y 3 se muestran a continuación.

Necesita cuatro cerillas para formar la figura 1, siete cerillas para formar la figura 2, y diez cerillas para formar la figura 3. Carlos sigue la misma regla cada vez para formar la siguiente figura de la serie.

hay 24 cerillas en total porque cada figuras tiene 4 cerillas.

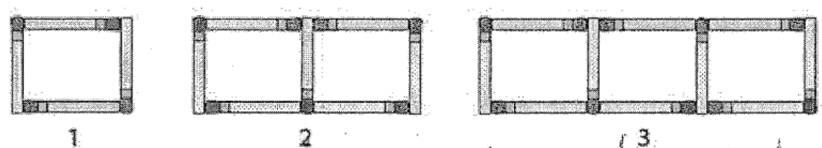


Alumno 4B-5

II) Carlos tiene que formar con cerillas las figuras 1 a 4.

Las figuras 1, 2 y 3 se muestran a continuación.

Necesita cuatro cerillas para formar la figura 1, siete cerillas para formar la figura 2, y diez cerillas para formar la figura 3. Carlos sigue la misma regla cada vez para formar la siguiente figura de la serie.



Para la cuarta 13 y para la quinta 16.
Porque sumo 3.

Figura 4.10: Ficha 1. Problema 2. Respuesta y argumentación correcta.

Después del trabajo en grupo no fue necesario resolver el problema en la pizarra pues todos los niños dijeron haber entendido el enunciado y la forma de resolverlo.

Este es un problema que los alumnos percibieron como fácil o de dificultad media, como muestra la tabla 4.4. También encontramos que muchos alumnos dijeron no entender el enunciado en el sentido de que no no tenían claro si había que decir el número de cerillas que se necesitaban en total o las que necesitabas para hacer una sola de las figuras.

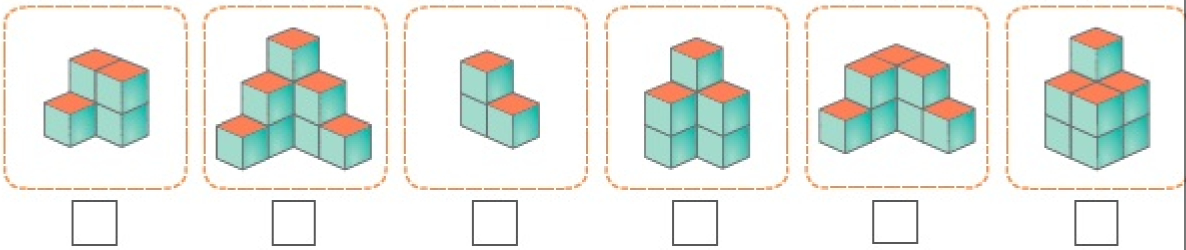
Tabla 4.4: Ficha 1. Problema 2. Encuesta sobre los procesos metacognitivos.

Enunciado		Dificultad		Respuesta correcta	
Entiendo el enunciado	62,2%	Fácil	56,8%	Bien resuelto	51,4%
No lo entiendo pero lo he hecho	20,7%	Dificultad media	25,2%	Podría tenerlo bien resuelto	32,4%
No lo entiendo	4,5%	Difícil	8,1%	No está bien	3,6%
No contesta	12,6%	No contesta	9,9%	No contesta	12,6%

Fuente: elaboración propia.

4.3. Ficha 1 - Problema 3

En las figuras hay dados como este: . Cuéntalos.



Como ya hemos explicado, este es un problema que aparece en el libro de texto de primero de Educación Primaria «Más ideas, menos cuentas». El problema lo habíamos trabajado con los niños de primero y segundo y habíamos observado la tenacidad con la que algunos niños intentaban reproducir las figuras sin tener en cuenta las piezas que no se ven en el dibujo pero son necesarias para construir físicamente las torres. El tutor de segundo nos había comentado que esto podía ser debido a los juegos que tienen en el ordenador o las tablets, donde las figuras se sostienen en el aire independientemente de las leyes de la física. El problema no ha resultado mucho más fácil para los alumnos de cuarto.

Hemos de hacer notar que el enunciado no es muy claro, pues mientras que todos los adultos que lo leímos interpretamos que se nos preguntaba sobre el número de cubos necesarios para construir cada una de las figuras, una parte importante de los niños entendió que le estaban preguntando tan solo por el númeo de cubos que se ven en la figura. En cualquier caso, esta aclaración se hizo en voz alta tan pronto un alumno nos preguntó por ello en la primera sesión de clase.

Hay 8 niños que han dejado la pregunta sin contestar. Y solo 13 niños han contestado bien a 5 o 6 de las construcciones propuestas. Entre los 4 alumnos que han contestado correctamente a 5 de las preguntas no hay coincidencias en la figura que no han sabido contestar. El 47 % de los alumnos ha contestado correctamente como máximo 3 de las preguntas. Fue necesario que sus compañeros de equipo les construyeran físicamente las figuras para que ellos se convencieran del número total de cubos que se empleaban en la construcción.

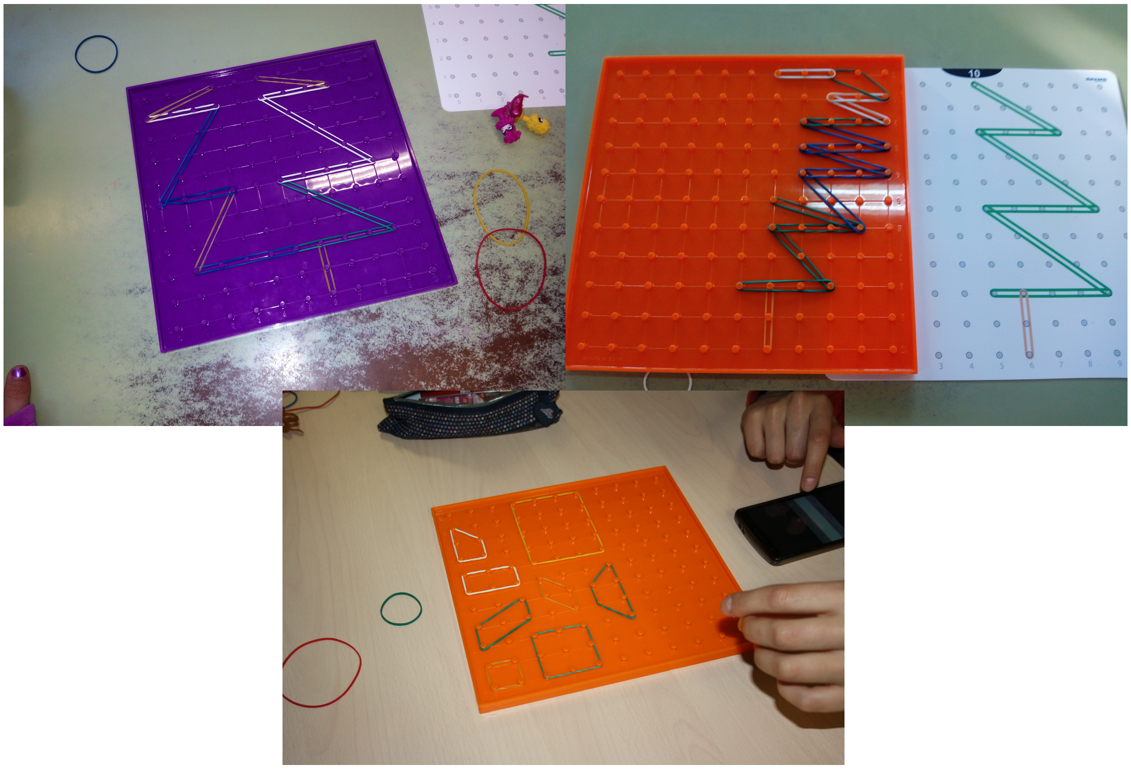


Figura 4.11: Ejercicios de dictado y simetría con el geoplano. Ejercicio de clasificación de cuadrilateros, solución del maestro del aula.

Uno de los alumnos nos dijo no estar seguro del número de piezas que se escondían por detrás pues este podía ser un problema trampa. A lo que le contestaron en el grupo que no es así pues «Arantxa no nos pone problemas trampa, ¿no te acuerdas?» (C3. P20). Desde nuestro punto de vista, no es aconsejable plantear a los niños problemas «tramposos» cuando ellos no han adquirido todavía destreza y confianza en la resolución de problemas, pues esto puede incluso llegar a reducir la tenacidad para resolver la tarea si se han dado con anterioridad experiencias negativas en este sentido.

En dos sesiones más trabajamos problemas de geometría y construcciones pero nos centramos en el plano pues entendimos que antes de pasar a las tres dimensiones convenía trabajar dos dimensiones. Se trabajaron problemas de clasificación de figuras planas con el geoplano y el tangram y reprodución de construcciones que o bien eran dictadas y el alumno tenía que reproducirlas con su tangram o su geoplano, o bien se proyectaba una parte de la figura y se pedía a los alumnos que reprodujeran la parte que faltaba teniendo en cuenta que era simétrica respecto al eje que se indicaba. En las figuras 4.11 y 4.12 mostramos ejemplos de algunas de estas sesiones.

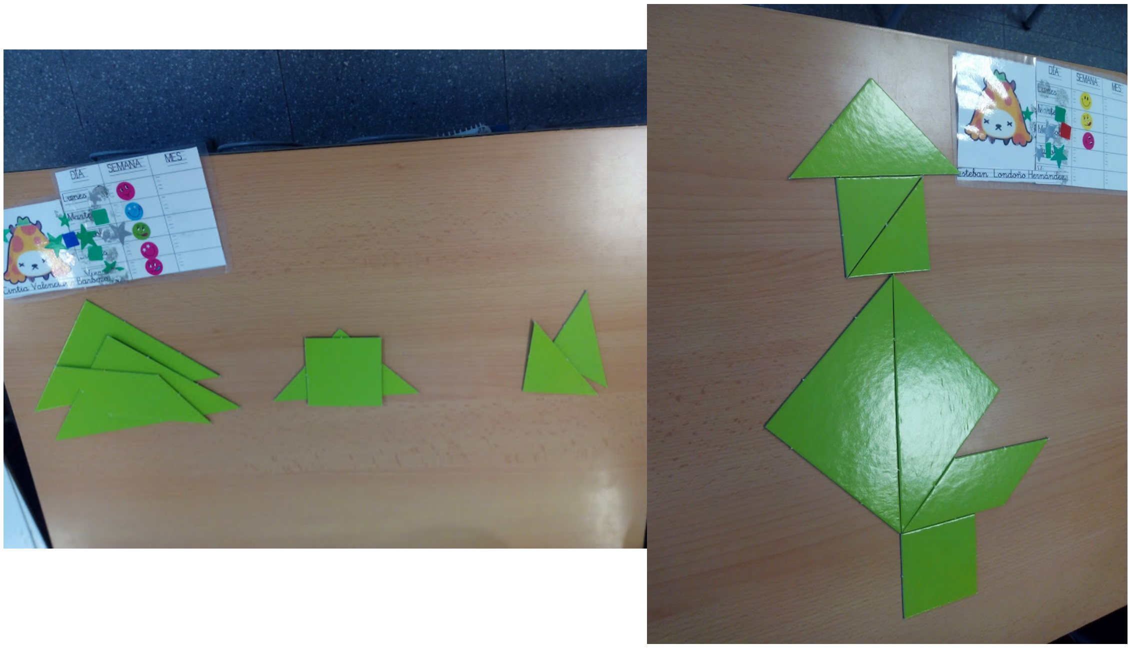


Figura 4.12: Ejercicios de clasificación de las piezas del tangram. Respuesta de un alumno al puzzle planteado en la pizarra

4.4. Ficha 1 - Problema 4

> En el almacén de pinturas, la pintura viene en latas de 5 litros. Santi necesita 37 litros de pintura. ¿Cuántas latas debe comprar?

Hemos elegido esta pregunta pues los resultados de la prueba oficial no son buenos (véase la tabla 2.13) y este parece un problema que cualquier niño de cuarto de primaria debería estar en disposición de contestar correctamente. El 36 % de los alumnos españoles y el 44 % de la muestra internacional que hicieron la prueba oficial de TIMSS 2011 responden correctamente a esta pregunta. Este es un problema tratado en la literatura en otras ocasiones, especialmente con niños de cursos superiores: final de primaria y primeros años de secundaria (Silver, 1993; Verschaffel, De Corte, et al., 1999; Rodríguez, Lago et al., 2009; Battreal, 2016) y los resultados que se muestran no son mejores: solo el 24 % de los alumnos de 13 años que se sometieron al NAEP1983 (Third National Assessment of Educational Progress) fueron capaces de responder correctamente a un problema de características similares: «Un autobús del ejército tiene capacidad para 36 soldados. Si hay que transportar 1128 soldados al campo de entrenamiento, ¿cuántos autobuses se necesitan?».

En la prueba de 6.º de Primaria del Estado de California en 1983 (California Assessment Mathematics Test for Grade 6) el 35 % de los alumnos contestaron correctamente a un problema del mismo tipo (citado por Silver, 1993).

Lago y Rodríguez, en un estudio más reciente (2009) en que se propone el problema a 45 alumnos de primero de la ESO de edades comprendidas entre los 12 y 13 años, obtienen resultados similares y observan que cuando se preguntaba directamente por el cociente o el resto el éxito fue superior que cuando había que «Reajustar-Cociente-Incrementándolo-Parcialmente». Estas investigaciones sugieren como causa de estos bajos índices de éxito que los alumnos se limitan a realizar los cálculos y no a interpretarlos, que no aplican el conocimiento cotidiano a la hora de interpretar la respuesta, ni a la hora de analizar el problema. En palabras de Lago y Rodríguez, «ignoran el nivel de realismo permitido en sus interpretaciones dentro del contexto escolar, parten de una interpretación errónea de la situación inicial». Para Silver, más bien se debe a la la falta de «sentido o significado» («sense-making»): los alumnos no son capaces de relacionar el resultado de las operaciones con el contexto del problema, no le dan «sentido o significado» («sense-making». En esta línea también encontramos estudios de Lester, Garofalo y Kroll, 1989; Palm, 2008; Verschaffel, Greer y De Corte, 2000, frente a la postura de Lago et al. (2008), quienes parecen atribuirlo a una representación inicial deficitaria.

Con la muestra de alumnos de cuarto y quinto curso del capítulo 2 encontramos que el error a la hora de responder estaba más ligado a la falta de interpretación del resultado final de la operación planteada, especialmente cuando utilizaban una división. La postura de los alumnos parece ser: «este es un problema de dividir, la respuesta es el cociente de la división y el resto es lo que sobra».

Este tipo de problemas, en el que la división se presenta como división de «medida» o «cuotativa», no aparecen en los libros de texto y las maestras del aula no parecen ser conscientes de este segundo significado de la división (ya nos pasó con todos los tutores que participaron en el test del capítulo 2). Es un aspecto que hay que trabajar expresamente porque la operación matemática, su expresión simbólica, es la misma, pero el significado de cada una de sus partes depende del contexto del problema y de las cantidades obtenidas. A diferencia de otros problemas planteados y trabajados en el aula el dar «sentido o significado» no es opcional, pues resolver correctamente los cálculos no es suficiente para dar una respuesta correcta.

Tabla 4.5: Ficha 1. Problema 4. Encuesta sobre los procesos metacognitivos.

Enunciado		Dificultad		Respuesta correcta	
Entiendo el enunciado	75,7%	Fácil	69,4%	Bien resuelto	48,6%
No lo entiendo pero lo he hecho	8,1%	Dificultad media	9,7%	Podría tenerlo bien resuelto	26,0%
No lo entiendo	1,8%	Difícil	0,9%	No está bien	2,7%
No contesta	14,4%	No contesta	20,0%	No contesta	22,6%

Fuente: elaboración propia.

El problema no es rutinario y bien podría ser considerado «un buen problema de matemática realista» pues se presta a usar tus conocimientos del mundo real para la resolución de problemas y viceversa, permite aplicar conocimientos matemáticos elementales para dar respuesta a una situación de la vida cotidiana.

El problema nos interesa por estas razones y para intentar comprender un poco mejor los mecanismos que utilizan los alumnos para dar sentido y significado a cada una de las cantidades involucradas en el enunciado y las que se obtienen como resultado de sus planteamientos.

La situación que presenta el problema ya nos había aparecido en la ficha 4, problemas 2 y 3 (la fiesta de cumpleaños en el zoo y el álbum de cromos, respectivamente). En aquella ocasión encontramos un porcentaje de aciertos del 43 % para el primer problema y del 53 % para el segundo (el problema se trabajó después de haber corregido en grupo el problema anterior). En tercero encontramos que un buen número de los niños habían recurrido a una solución gráfica y sumas reiteradas para resolver ambos problemas. En cuarto, solo dos niños han recurrido a esta estrategia. 19 alumnos han dejado el problema en blanco y tan solo 8 alumnos (15 % de las respuestas) han conseguido responder correctamente (los dos que han hecho el dibujo están entre ellos). Entre las 21 respuestas incorrectas, 16 alumnos optan por plantear la multiplicación de 37×5, y 4 alumnos plantean la división y responden que serán necesarias 7 latas de pintura.

La tabla 4.5 muestra la percepción de los alumnos sobre el grado de dificultad y lo acertado de sus respuestas. Se observa que hay una discrepancia importante entre la percepción del alumno y las respuestas correctas: un 48,6 % de los niños creen tenerlo bien resuelto frente al 15 % de los que obtienen la solución correcta.

Para corregir los problemas, tal y como hemos explicado, les hemos puesto en grupos de cuatro, han trabajado el problema juntos y después se ha corregido en la pizarra. Dado el escaso número de alumnos que han llegado a resolver bien el problema, solo en el aula A ha sido posible hacer grupos donde al menos uno de los niños había sabido responder correctamente la pregunta. En las otras dos aulas solo algunos de los grupos cuentan con un alumno que resolvió correctamente el problema.

Transcribimos en primer lugar la conversación de un grupo donde no se ha dado ninguna respuesta correcta. Un alumno había planteado la suma de $37 + 5$; otro había hecho una multiplicación 37×5, que había tachado y sustituido por la resta $37 - 5$; y los otros dos habían hecho la división pero aportando la respuesta errónea. Toman la iniciativa los dos alumnos que han planteado la división:

B10: Está «chupao», tenemos que dividir.

B17: Sí, hay que dividir (hace la división en el folio de trabajo).

B10: Hay que comprar 7 latas. (C2. P22)

El resto de los miembros del grupo han permanecido callados, aceptan la respuesta que plantean estos dos alumnos y no llegan a hablar sobre sus propuestas ni cuestionan la validez del resultado. Este no es un caso aislado: en la corrección grupal surge en todos los grupos como respuesta válida la división (esto es llamativo pues hay grupos que se plantean la multiplicación pero enseguida se convencen de que está mal pues «¿cómo vas a tener que comprar tantas latas?» (C1. P22), hemos llegado a escuchar en un grupo). Cuando el problema se corrige en grupo no hay ningún equipo que nos plantee otra operación que no sea una división. Pero no todos concluyen que serán necesarios 8 botes de pintura.

En la corrección en grupo el diálogo entre ellos deja muy claro que esta última respuesta es la correcta. Decidimos analizar algunas de las respuestas erróneas que habían planteado otros alumnos, y para ello les planteamos a todo el grupo diseñar un problema cuya respuesta sea la operación planteada, por ejemplo: 37×5. No hay mucha variedad de propuestas, la propuesta en términos de dinero surge sin dificultad en todas las clases. Necesitan algo de ayuda para llegar a proponer la segunda de las opciones:

- «Santi necesita 37 litros de pintura y cada litro cuesta 5 euros, ¿cuántos euros son?».
- «Santi necesita 37 litros de pintura para pintar cada clase, en el colegio hay 5 clases, ¿cuánta pintura va a usar?».

Las propuestas a $37 - 5$ y $37 + 5$ surgen sin dificultad:

- «Santi compró 37 litros de pintura y le han sobrado 5 litros, ¿cuánta pintura ha usado?».

- «Santi compró 37 litros de pintura y después 5 más, ¿cuánta pintura ha comprado?».

Con este ejercicio intentamos dar sentido a las operaciones que ellos inicialmente habían planteado para ayudarles a comprender por qué estas propuestas no son correctas en el contexto planteado.

El trabajo en grupo permite además observar los factores contextuales sobre los que hablamos en el marco teórico: «el entorno social, la comunidad dónde se desarrolla la práctica matemática, las interacciones entre alumnos, las expectativas del alumno». En los equipos donde hay un alumno que ha sabido responder correctamente (son un total de 8 equipos, cuatro en el aula A y dos en cada una de las otras dos aulas) es fácil observar cómo las personalidades y relaciones establecidas en la clase influyen en la forma de trabajar del equipo. Por ejemplo, en el aula A, tres de los niños que han resuelto correctamente el problema son aceptados por la clase como buenos resolutores pero sobre el cuarto se admite que resuelve bien pero no es aceptado por el grupo, ni él acepta al grupo, es continuamente cuestionado. La respuesta de 8 latas propuesta por este alumno no es aceptada, los miembros de su equipo le discuten que le va a sobrar pintura y no ven la necesidad de comprar más pintura; este alumno tan solo argumenta que no van a tener bastante para pintar todo pero no va más allá, no está trabajando en un grupo donde se sienta cómodo y decide esperar a la corrección grupal para hacer valer su criterio con un «ves, yo lo tenía bien».

En el aula B uno de los alumnos que ha resuelto bien el problema, como es habitual, y que obtiene muy buenas calificaciones en la materia, no ha participado en el trabajo en grupo; acepta la solución propuesta por sus compañeros sin discutir con estos, no le interesa trabajar en grupo, tampoco muestra interés por otras formas de solucionar el problema que sean diferentes a la suya cuando se abordan las correcciones grupales. En esta ocasión no podemos concluir si es consciente de que la solución propuesta por el grupo no es correcta, pues cuando le preguntamos si está de acuerdo con ella solo llega a contestar: «ya tenemos una respuesta».

Un problema similar a este se volverá a trabajar un mes y medio más tarde. Es el problema número 4 de la ficha 3 y lo analizamos ahora por coherencia temática.

El problema dice:

> Ana tiene 68 cromos que quiere repartir en bolsitas. En cada una de ellas va a colocar siete cromos. ¿Cuántas bolsitas va a necesitar Ana?

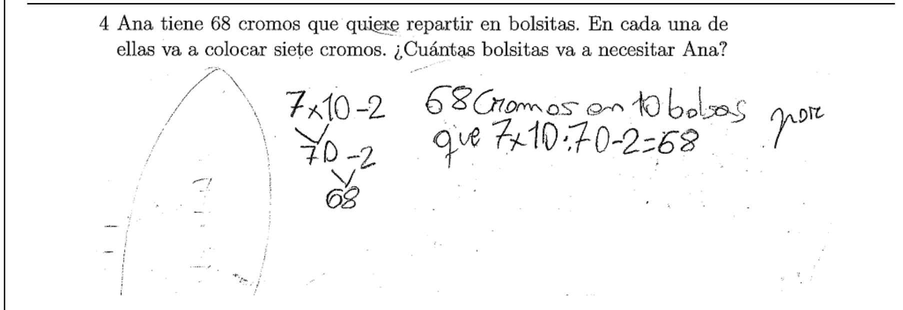
En esta ocasión contamos con las respuestas de 47 alumnos que han asistido a la sesión. Han estado trabajando en grupos, pero se ha pedido en un primer momento que cada alumno resolviera los problemas de forma individual (la investigadora ha pasado mesa por mesa anotando los resultados) y después han puesto su trabajo en común para proponer una solución común.

Tanto en las respuestas individuales como en las de grupo se observa que la mayoría ha recurrido a hacer una división; solo hay dos alumnos que han recurrido a un dibujo como estrategia individual que abandonan cuando trabajan en grupo.

En el análisis individual observamos que 8 alumnos han dejado el problema en blanco, 29 alumnos han respondido correctamente, no todos llegan a contestar que serán necesarias 10 bolsas pero sí contestan que hay 9 bolsas completas y 5 que van en otra bolsa. Salvo dos alumnos que han recurrido a hacer un dibujo, y otros dos que los resuelven por sumas sucesivas y uno por multiplicación, el resto plantea la división e interpreta tanto el cociente como el resto adecuadamente (la figura 4.13 muestra ejemplos de estas situaciones); hay un alumno que hace la división y después los dibujos y explica que lo ha hecho para comprobar que el resultado es correcto. Hay 9 alumnos que no resuelven bien el problema: dos de ellos plantean la división pero responden que son necesarias tantas bolsas como el resto que les da, y los demás o bien hacen cualquier otra operación o bien cometen errores graves al hacer la división.

Cuando pasan a debatir en grupo todos están de acuerdo en la forma de interpretar el problema, aunque nosotros una vez revisado el enunciado creemos que no está claramente redactado, pues no especifica que todos los cromos deban estar empaquetados. Como hemos observado en otras situaciones, los alumnos interpretan el enunciado adaptándose a contextos conocidos.

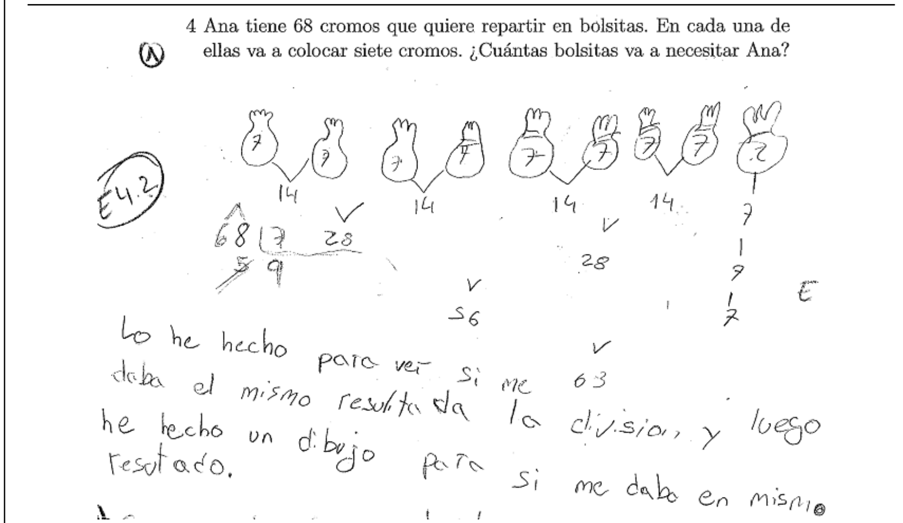
Alumno 3C-8


4 Ana tiene 68 cromos que quiere repartir en bolsitas. En cada una de ellas va a colocar siete cromos. ¿Cuántas bolsitas va a necesitar Ana?

7x10-2
70-2
68

68 Cromos en 10 bolsas por que 7x10:70-2=68

Alumno 4A-11


4 Ana tiene 68 cromos que quiere repartir en bolsitas. En cada una de ellas va a colocar siete cromos. ¿Cuántas bolsitas va a necesitar Ana?

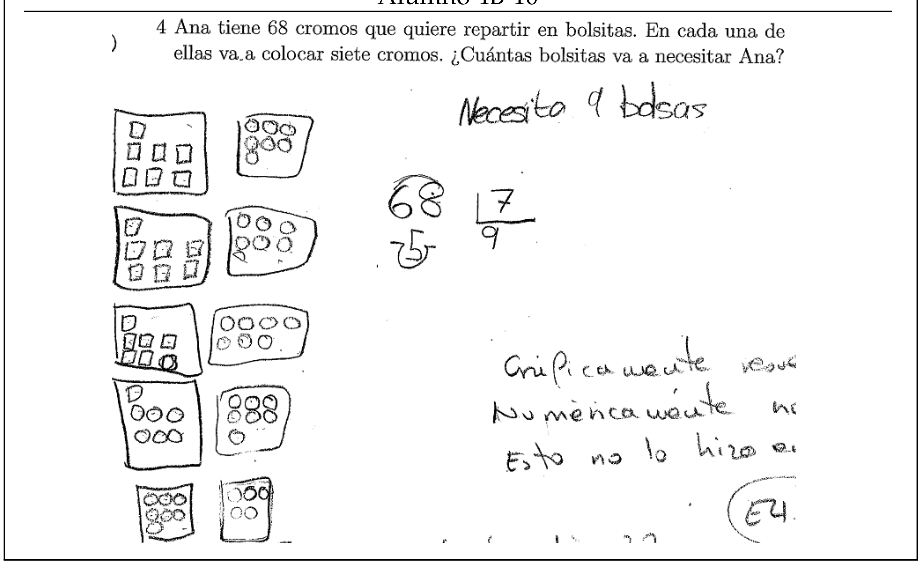
14 14 14 14 7

68 | 7 28
5 9

28 56 63

Lo he hecho para ver si me daba el mismo resultado la division, y luego he hecho un dibujo para si me daba en mismo resotado.

Alumno 4B-10


4 Ana tiene 68 cromos que quiere repartir en bolsitas. En cada una de ellas va a colocar siete cromos. ¿Cuántas bolsitas va a necesitar Ana?

Necesita 9 bolsas

68 | 7
5 9

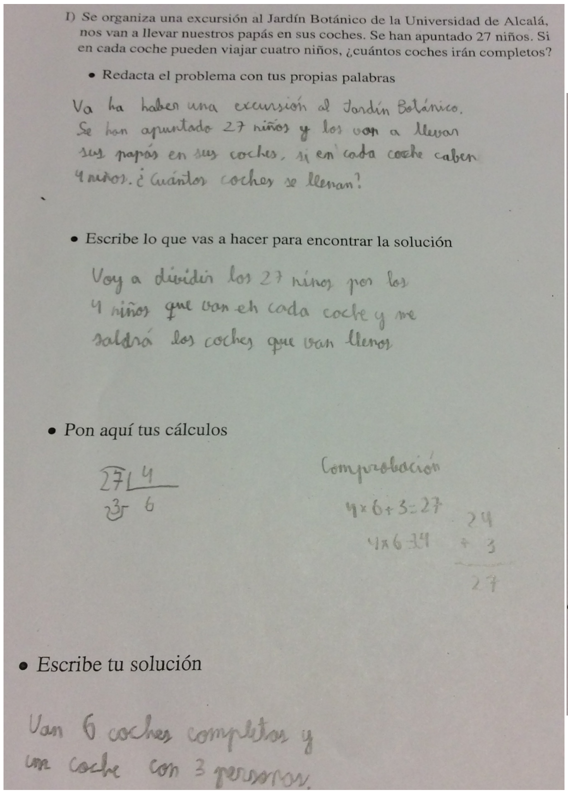
Gráficamente resue
Numéricamente no
Esto no lo hizo e

Figura 4.13: Ficha 3. Problema 4. Distintas estrategias de resolución.

Después de trabajados y analizados estos problemas, las maestras nos sugieren que les facilitemos una secuencia de trabajo con problemas de este estilo para que ellas los aborden en estos grupos cuando tengan oportunidad, figura 4.14, o en otros grupos en el futuro. La secuencia de problemas que se plantea en la tabla siguiente está inspirada en la propuesta de trabajo de Verschaffel (1999) sobre cómo «interpretar el resultado y formular una respuesta» en «Learning to solve mathematical application problems: a design experiment with fifth graders».

Relación de problemas

1. Ignorar el resto
   - Problema: Al parque de atracciones hemos acudido 58 alumnos. En la montaña rusa hay coches de cuatro plazas. ¿Cuántos coches irán completos?
   - Solución $58 : 4 = 14\,R\,2$; 14 coches con 4 alumnos cada uno. En el último coche, el número 15, solo irán dos alumnos. Solo 14 coches van completos.
2. Añadir uno al cociente
   - Problema: Al parque de atracciones hemos acudido 58 alumnos. En la montaña rusa hay coches de cuatro plazas. ¿Cuántos coches son necesarios para que montemos todos?
   - Solución: Para montar todos se necesitan 15 coches. $58 : 4 = 14\,R\,2$
3. El resto es la respuesta
   - Problema: Al parque de atracciones hemos acudido 58 alumnos. En la montaña rusa hay coches de cuatro plazas. Vamos tomando asiento de uno en uno y completando los coches. ¿Cuántos alumnos irán en el último coche?
   - Solución: $58 : 4 = 14\,R\,2$. 14 coches con 4 alumnos cada uno, se completan 14 y es necesario un coche más en el que se colocan los dos alumnos restantes.
4. La respuesta como una fracción
   - Problema: Tenemos 58 galletas a repartir en partes iguales entre cuatro alumnos. ¿Cuántas galletas les puedo dar a cada uno?
   - Solución: Le puedo dar 14 galletas y media. 14 galletas completas y las dos que sobran las puedo cortar por la mitad para dar media galleta a cada alumno.



D) Se organiza una excursión al Jardín Botánico de la Universidad de Alcalá, nos van a llevar nuestros papás en sus coches. Se han apuntado 27 niños. Si en cada coche pueden viajar cuatro niños, ¿cuántos coches irán completos?

• Redacta el problema con tus propias palabras

Va ha haber una excursión al Jardín Botánico. Se han apuntado 27 niños y los van a llevar sus papás en sus coches, si en cada coche caben 4 niños. ¿Cuántos coches se llenan?

• Escribe lo que vas a hacer para encontrar la solución

Voy a dividir los 27 niños por los 4 niños que van en cada coche y me saldrá los coches que van llenos

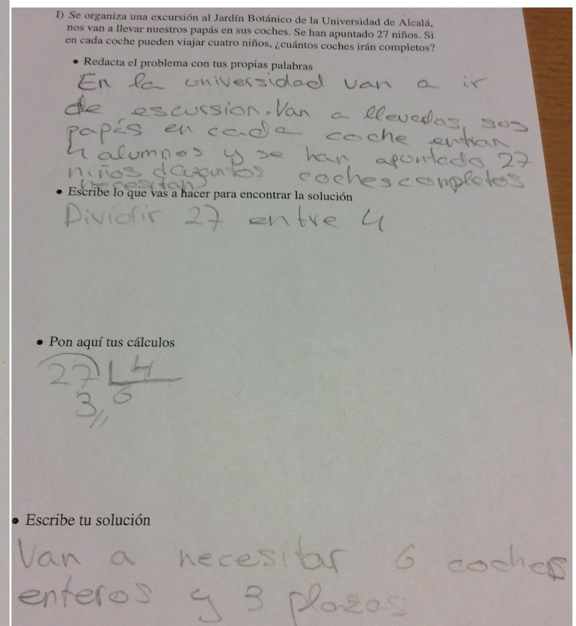
• Pon aquí tus cálculos

27 | 4
3 6

Comprobación
4×6+3=27
4×6=24
24 + 3 = 27

• Escribe tu solución

Van 6 coches completos y un coche con 3 personas.



D) Se organiza una excursión al Jardín Botánico de la Universidad de Alcalá, nos van a llevar nuestros papás en sus coches. Se han apuntado 27 niños. Si en cada coche pueden viajar cuatro niños, ¿cuántos coches irán completos?

• Redacta el problema con tus propias palabras

En la universidad van a ir de escursion. Van a llevarlos sus papás en cada coche entran 4 alumnos y se han apuntado 27 niños ¿cuantos coches completos

• Escribe lo que vas a hacer para encontrar la solución

Dividir 27 entre 4

• Pon aquí tus cálculos

27 | 4
3 6

• Escribe tu solución

Van a necesitar 6 coches enteros y 3 plazas

Figura 4.14: Ejemplo de ficha de trabajo sobre el concepto de división y sus diferentes significados.

5. Análisis de la ficha 2

5.1. Ficha 2 – Problema 1

En esta actividad hemos utilizado dos enunciados alternativos. En las aulas A y C se ha presentado el siguiente enunciado:

> ¿Podrías obtener los números del 1 al 20 usando como máximo cuatro cuatros? Puedes utilizar las operaciones que consideres oportuno y también puedes utilizar paréntesis como creas conveniente[2].
>
> Si en tu grupo encontráis más de una forma para un mismo número no la descartéis, después vamos a ponerlas todas en común.

Organizamos a los alumnos en grupos de cuatro o cinco. Antes de ello les explicamos la dinámica que esperamos establecer en el aula: cada alumno pensará cómo escribir individualmente cada uno de los números y cuando crea haber dado con uno lo comunica al grupo para que entre todos comprueben si es correcta la expresión y cumple con las condiciones del enunciado. En caso afirmativo, se anota en la hoja de resultados del grupo. Al final de la clase haremos una puesta en común sobre las distintas formas de escribir los números y cada grupo saldrá a exponer las suyas. Nosotros vamos a recoger todas las hojas, las individuales y la grupal.

El enunciado del problema se transmite de forma verbal y se escribe en la pizarra; los alumnos dispondrán de folios en blanco para trabajar.

Para ilustrar la forma de proceder y aclarar el enunciado, en la pizarra se discute una posible expresión para el número cero: $0 = 4 - 4 + 4 - 4$. Comprobamos en voz alta que se cumplen las condiciones del enunciado.

Se repasa lo que el libro del profesor denomina «operaciones combinadas, frases numéricas». Algunos de estos contenidos del currículo de 3.º de Educación Primaria no aparecen en el libro de texto, pero sí en la programación de aula y en los estándares de la comunidad de Castilla la Mancha: dentro del apartado de «Contenidos», en el bloque 2, Números, dice textualmente «operaciones combinadas con números naturales, jerarquía de las operaciones»[3]. Esto se corresponde con el criterio número 8 de evaluación: «Operar con los números teniendo en cuenta la jerarquía de las operaciones aplicando las propiedades de las mismas, las estrategias personales y los diferentes procedimientos que se utilizan según la naturaleza del cálculo que se ha de realizar (algoritmos, tanteos, estimación...)».

Nuestros alumnos trabajaron este contenido en el último trimestre del curso anterior. Recuerdan vagamente la forma de proceder y por eso repasamos mediante algunos ejemplos.

En el aula B la presentación y secuencia de trabajo establecida ha sido la siguiente:

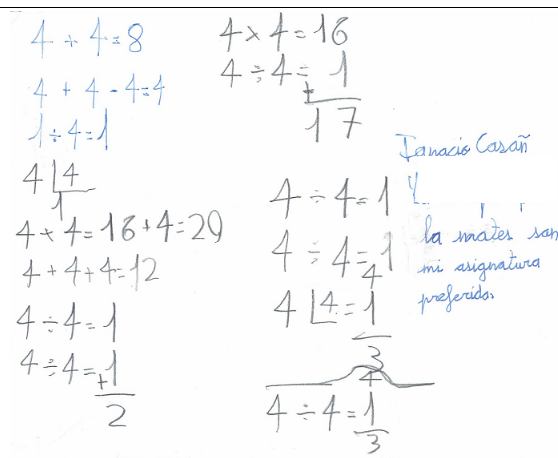
[2] El problema de los cuatro cuatros es uno de los problemas enunciados en el libro El hombre que calculaba (de Malba Tahan). El enunciado está simplificado para hacerlo más accesible a los alumnos de 4.º curso. El enunciado original pide obtener los números del 1 al 100 usando exactamente cuatro cuatros.

[3] Decreto 54/2014, de 10/07/2014, por el que se establece el currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Castilla la Mancha. Publicado en el DOCM. Bolletín n.º 132, 11 de julio de 2014 p. 18705).

Escribir el número 4 cuatro veces. Escribid los signos de las operaciones y haced el cálculo. Por ejemplo podemos escribir $4 \times 4 + 4 + 4 = 24$. ¿Qué números habéis obtenido? Escribe ahora las operaciones necesarias para obtener los números del 1 al 20.

Pedimos a los alumnos que trabajen individualmente durante unos minutos, cuando hemos comprobado que todos han llegado a escribir tres o cuatro expresiones organizamos los grupos.

Alumno 4A-2



Alumno 4C-1

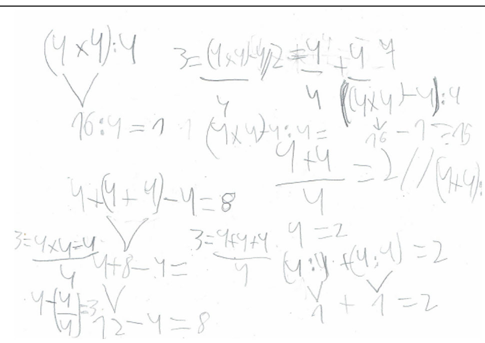


Figura 4.15: Ficha 2. Soluciones individuales al problema de los 4 cuatros.

En las figuras 4.15 y 4.16 mostramos ejemplos de trabajo individual y colectivo. No hemos podido apreciar diferencias en los resultados obtenidos en cuanto a las dos formas de presentar el problema. La forma de introducir el enunciado en el grupo B nos permitía pautar el trabajo y plantear preguntas como «¿cuál es el menor resultado posible que puedes obtener?», «¿cuál es el mayor resultado posible que puedes obtener?», «¿por qué?».

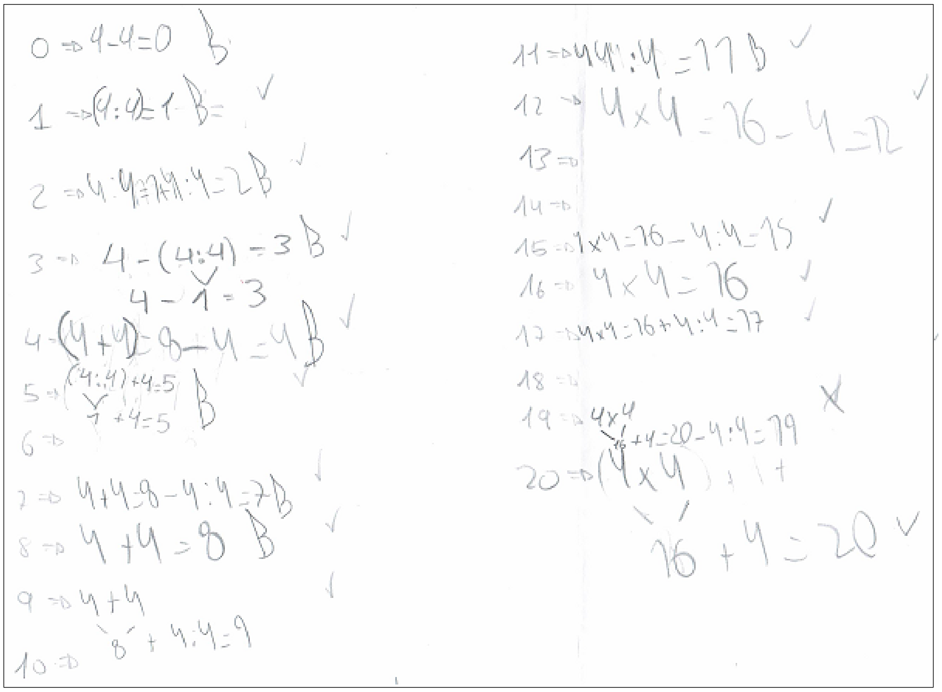


Figura 4.16: Ficha 2. Solución de un grupo de trabajo al problema de los 4 cuatros.

Transcribimos algunas de las conversaciones captadas en las aulas:

A11: Arantxa, ¿a que esto no lo podemos hacer? (se refiere a la división $44 : 44$ escrita con la caja que tiene en su hoja en sucio).

I: ¿Por qué no lo puedes hacer?, ¿por qué quieres hacer eso?

A11: Porque nosotros no hemos aprendido a hacer divisiones entre dos números.

A2: Ya pero 44 caramelos que doy a 44 niños tocan a un caramelo.

A11: ¿Y entonces 100 caramelos entre 100 niños tocan a 1, listillo?

A2: ¡Toma claro!

I: ¿Tú crees que 100 caramelos repartidos entre 100 niños tocan a un caramelo cada uno? (dirigiéndose a A7), [en la discusión entre A11 y A2 los otros dos miembros del grupo están muy callados].

A7: Sí, sí, yo creo que está bien pero él dice que no.

A2: ¡Toma y entonces $44-44=0$, ya tenemos otra forma! (Está interesado en el problema, no en las dudas de sus compañeros). (C1. P22-23)

En otro instante y con otro grupo:

A13: ¿Se puede hacer esto: $44:4=11$?

I: Y ¿por qué no lo vas a poder hacer?

A13: Se puede hacer. (C1. P23)

En el aula C:

C8: Te vas a pasar (su compañero ha escrito $444:4$).

C11: No me voy a pasar, necesito lo que me dé aquí (señala el lugar en el que debe ir el cociente).

C8: Ya pero te vas a pasar.

I: ¿Qué quieres decir con «te vas a pasar»?

C8: Se va a pasar porque $4\times 100=400$, así es que se va a pasar.

C8: Ah (se queda un rato en silencio mirando su papel y escribe), $44:4=11$ y ya está.

C13: Pero ahora $11+4=17$ y tenemos uno más (se le ve realmente contento, su respuesta ha sido casi instantánea). (C3. P23)

Uno de los equipos del grupo B enuncia primero el número que busca para a partir de este encontrar otros, pero al verbalizar dan con un resultado diferente:

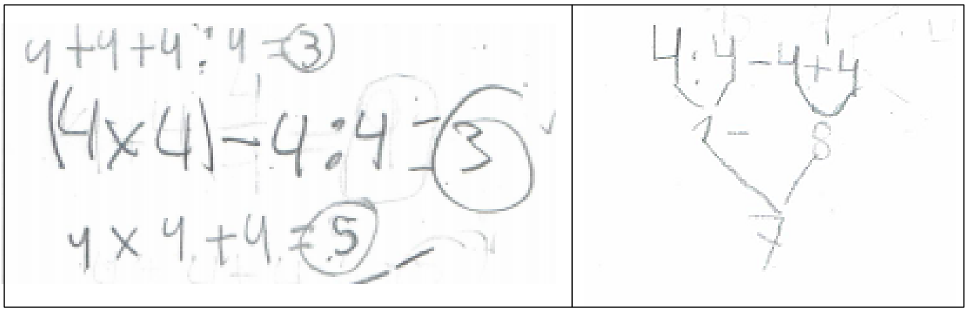
B8: Tenemos que sacar el 14 y al 14 le quitas 4 y tenemos 10.

B6: Pero si sumo 4 veces 5 tengo el 20 y después divido y tengo el diez. ¿No?

B8: Sí, hala y cuántos 4 vas a escribir, un montón. Ya sé, si $4+1$ son 5, tenemos el 5 (escribe $4+4:4=5$).

I: Bueno, si yo hago esta operación no me da 5, mira: $4+4$ son 8 y 8 dividido entre 4 son 2, ¿cómo lo podéis escribir para obtener 5? (C2. P22)

El problema permite trabajar el sentido numérico, las habilidades de cálculo e indagar sobre el conocimiento de los alumnos acerca de la jerarquía de las operaciones y el uso de los paréntesis. El debate y discusión ha sido muy productivo y ha llevado tiempo revisar cada una de las expresiones que ellos escribían hasta dar con la forma correcta. Les ha costado comprender que la escritura matemática no se adapta a la trascripción literal de la



(a) (b)

Figura 4.17: Ficha 2. Problema de los 4 cuatros. Introducción de paréntesis y cálculos sin considerar la jerarquía de las operaciones.

secuencia verbal que ellos van expresando. Como puede observarse en la figura 4.17, los niños escriben las operaciones tal y como ellos se las representan y calculan mentalmente, sin considerar la jerarquía que se impone una vez son transcritas al papel.

A continuación mostramos una conversación sobre la solución propuesta para el número 4 por uno de los equipos del grupo B:

B21: $4 - 4 \times 4 : 4 = 4$.

I: ¿Podemos hacer juntos este cálculo?, ¿$4 - 4$?

B21: 0. (I: sigue, por favor sigue con el cálculo).

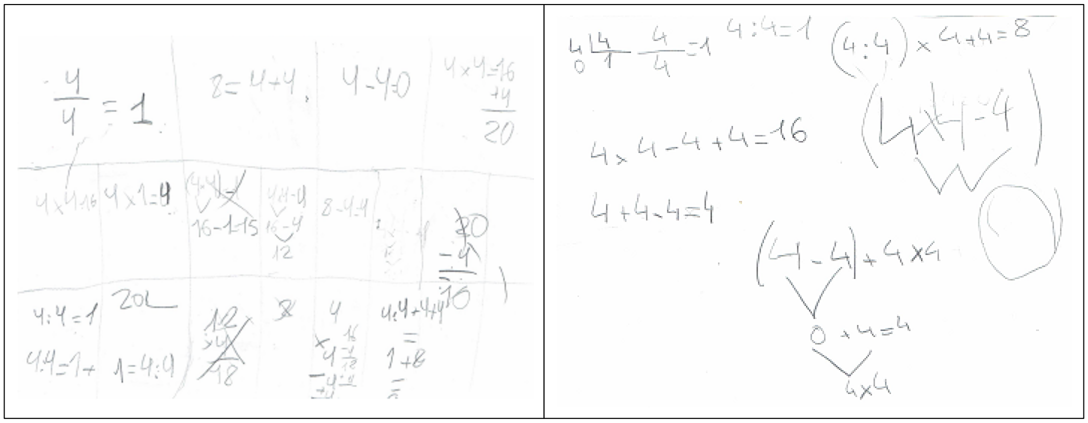
B21: 0, esto da cero, o ¿no?, bueno no lo sé, ¿0 dividido entre 4 son cero?

I: Y si da cero, ¿cómo lo puedo escribir para obtener 4? (C2. P23)

Después de varios intentos, se rinde y concluye que no lo puede escribir si empieza por escribir $4-4$ y mantiene el resto de las operaciones propuestas. Esta situación no es nueva, los alumnos se centran en un punto o paso concreto que consideran puede ser el erróneo mientras que asumen que el resto es correcto, no revisan el resto de las etapas, véase la figura 4.17 (a).

La figura 4.18, (a) y (b), nos muestra el trabajo de un alumno del grupo B que en primer lugar comienza por ver cuántos números es capaz de escribir utilizando solo dos 4 (apartado b de la figura) y después pasa a utilizar 3 o 4 cuatros y ha comprobar los resultados obtenidos al escribir las expresiones con y sin paréntesis.

La tabla 4.6 nos muestra la frecuencia de la cantidad total de números obtenidos en el conjunto de la actividad. En todos los grupos han conseguido escribir todos los números



(a) (b)

Figura 4.18: Ficha 2. Problema 4. Alumno que avanza gradualmente: usa en un principio dos 4, calcula con y sin paréntesis.

salvo el 13, 14, 18 y 19 (para estos números es necesario utilizar $4!$ y/o $\sqrt{4}$, y por tanto es natural que no lo hayan conseguido). Estos números han quedado pendientes para otro día. Les hemos explicado que para poderlos escribir necesitan conocer algunas operaciones o cálculos especiales nuevos. La expresión «cálculos especiales» les ha llamado la atención y han preguntado por ella, lo que nos ha dado pie para explicarles cómo se calcula y escribe el factorial de un número. Hemos calculado el valor de $4!$, $5!$ y $6!$ y les hemos propuesto escribir alguno de los números que faltan usando $4!$

Tabla 4.6: Frecuencia de la cantidad total de números distintos obtenidos.

Cantidad de números diferentes obtenidos	8	9	10	11	12	13	14
Frecuencia	3	0	4	15	8	13	8

Fuente: elaboración propia.

En la puesta en común del aula A la maestra va tomando nota de las expresiones que le van dictando los alumnos, de manera individual. Se han recogido dos formas diferentes de obtener los números. La investigadora va tomando nota de las expresiones que utilizan; poco a poco se observa cómo van incorporando los paréntesis al dictar sus propuestas, aunque cada vez que aparece una expresión con paréntesis hay que detenerse a explicarla. Transcribimos las expresiones recogidas de los alumnos y la maestra que es quién dirige la sesión:

- Primero sumo $4 + 4$ que da 8. Entonces quito 4 y luego quito 4 otra vez que da 0.
- Primero 4 dividido por 4, que da igual a 1, entonces $+4$ y luego -4, que hace 1.
- Pongo paréntesis 4 dividido por 4, hacer esto otra vez y da dos. ([Maestra] si hago esto otra vez ¿lo multiplico por dos?). No, no lo sumas. Pongo entre paréntesis 4 entre 4 y sumo 4 dividido entre 4 con paréntesis y cada uno es 1 que suman 2.
- Haces $4+4+4 = 12$. Luego tienes que dividir 12 por 4, que es igual a 3. ([La maestra escribe en la pizarra $4 + 4 + 4 : 4 =$. Les preguntamos si esto es igual a 3, la mayoría de la clase dice que sí, un par de niños opinan que no. Que hay que poner «todo en paréntesis, porque si no te da 9». Hay que explicar paso a paso la secuencia con y sin paréntesis).
- 4 le quito 4 es 0. $0 \times 4 = 0$, luego sumas 4 que es igual a 4.
- Pones 4 por 4 igual a 16 y $16 + 4$ son 20. Divide 20 por 4 que es 5.
- 4 y 4 son 8. Divides 8 por 4 igual a 2. Y $2 + 4 = 6$.
- Pones paréntesis, divides 4 por 4 que son 1, y ahora restas 4 y 4 son 8, y son 7. (El alumno ha dictado lo que ha escrito, véase la figura 4.17(b). Entre todos lo escribimos correctamente: $4 + 4 - (4 : 4) = 8 - 1 = 7$.
- 4 y 4 por 4 son 32. Divides 32 por 4 y sale 8.
- Divide 4 entre 4 igual a 1. Suma 4 y 4 sale 8, $+1 = 9$.
- 44 le restas 4 y da 40 que lo divides entre 4 y da 10. Pero tienes que escribirlo con la raya larga. (Aprovechamos para escribirlo de dos formas diferentes: $\frac{44-4}{4}$ y $(44-4) : 4$.
- Entre paréntesis, divido 4 entre 4, igual a 1. $4 - 1 = 3$. $3 \times 4 = 12$.
- 4×4 y pones paréntesis, 4 dividido entre 4 y lo restas. Da 15.
- $4 + 4 + 4 + 4 = 16$.
- Haces 4×4 y sumas 4 dividido entre 4, son 17.
- 4×4 son 16 y más 4 tenemos 20. (C1. P25)

Esta forma de proceder es lenta y en las aulas B y C nos apremia el tiempo y optamos por cambiar el formato. Escribimos los números del 1 al 20 con suficiente espacio entre ellos en la pizarra y distintos alumnos van saliendo a escribir sus propuestas.

Actitudes observadas en clase

Antes de abordar el problema y como se trata del primero de los problemas que trabajamos desde el principio en grupos, se les explica la dinámica que queremos seguir y las diferencias con respecto al curso pasado y a la forma en la que hemos trabajado en las dos sesiones anteriores (los problemas de la ficha 1 se han trabajado individualmente antes de discutirlos en grupo). Les hemos pedido a los alumnos que nos explicaran las ventajas e inconvenientes del trabajo en grupo. ¿Qué me gusta y qué me disgusta cuando trabajo en equipo? y ¿qué normas querríamos poner para trabajar en equipo? Han surgido ideas muy interesantes:

- Todos parecen estar de acuerdo en que les gusta trabajar en equipo, en particular cuando se les deja elegir los compañeros, aunque algunos alumnos han manifestado que «sí, pero se tarda más porque puedes hablar de otras cosas, pero es más divertido». (C2. P22)

- «Hay que estar en tu sitio trabajando en tu grupo y no levantarse para irse a hablar con tus amigos» o «ir a ver cómo lo hace otro grupo para copiarse» porque «además puede terminar mal». (C1. P22)

- También han manifestado que no les gusta que «cuando algunos del grupo ya han encontrado una respuesta no escuchan lo que tú quieres decir» o que «quieren ir muy de prisa y terminar pronto». (C1. P22)

Finalmente se han organizado en grupos de cuatro alumnos, y en caso de necesidad uno o dos grupos con cinco alumnos. En el aula B, una vez iniciada la actividad y debido al comportamiento disruptivo de un par de alumnos, ha habido que separar y reconfigurar tres grupos. En este aula ya habían surgido menos ideas sobre el trabajo en equipo que en las otras dos, y al configurar los grupos hubo cinco niños que manifestaron claramente su desaprobación a estar trabajando en el grupo que se les había asignado. Es una clase donde se observan caracteres más individualistas. Una vez que hemos reconfigurado los grupos se han conseguido respuestas al problema por parte de todos los alumnos.

La actividad ha resultado muy estimulante tanto para los alumnos como para las maestras que han mostrado su satisfacción al comprobar el grado de implicación de los alumnos. Hay un grupo en el aula B que, al acercarnos y preguntar «¿cómo vais?», nos han contestado «lo estamos haciendo muy bien, nos llamamos los ¡5 fantásticos!». En las hojas de

Figura 4.19: Grupos de trabajo resolviendo el problema de los 4 cuatros. Maestro y alumno en prácticas en la imagen.

trabajo individual se pueden observar un buen número de intentos, varios alumnos han preguntado si es posible buscar otros números y si otro día podríamos seguir buscando más números. También han sentido curiosidad por saber si se podía hacer con otros números, por ejemplo con «5 cincos». A partir de su interés hemos planteado dos alternativas diferentes para seguir trabajando por su cuenta: escribir los números del 21 al 100; e intentar hacer el ejercicio con otros números, por ejemplo con «5 cincos».

Como ejercicio adicional que las maestras podían proponer en otro momento se les ha planteado el siguiente enunciado:

Utilizando los números 4, 6, 6 y 8, ¿de cuántos formas distintas puedes conseguir un resultado igual a 24? Por ejemplo $4+6+6+8=24$.

En la figura 4.19 podemos observar uno de los grupos durante la sesión de trabajo y en la figura 4.20 las propuestas de una alumna que ha trabajado este último problema cuando se propuso como actividad opcional para hacer el fin de semana.

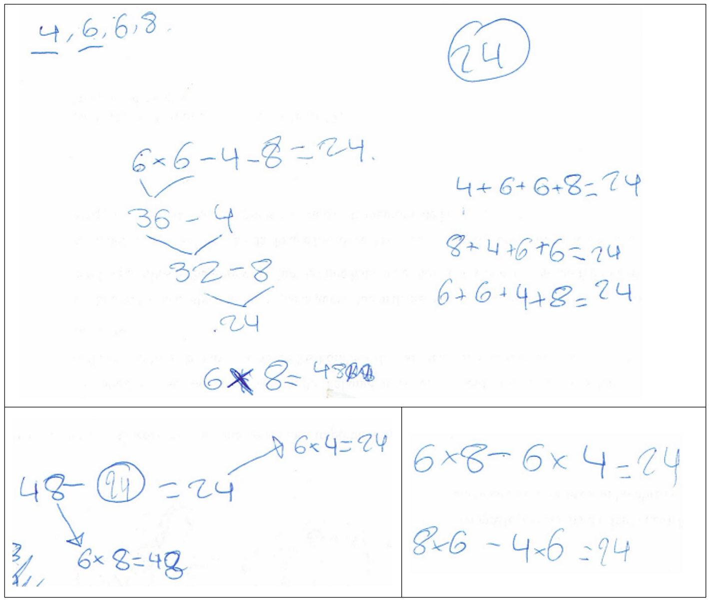


Figura 4.20: Solución al problema «buscar 24»

6. Análisis de la ficha 3

Todas las estrategias que esperamos que los alumnos pongan en marcha al abordar esta ficha ya se han trabajado en tercero. Es una ficha con cuatro problemas: en el primero, esperamos que los alumnos utilicen un razonamiento de proporcionalidad, observando las relaciones entre las cantidades inicial y final de las unidades compradas, y determinen el precio final a pagar. El segundo y tercer problema son de nuevo los problemas 2 y 3 de la ficha 1 de tercero ya revisados en la sección 6.2 del capítulo 3. El cuarto problema ya lo hemos comentado al abordar el problema 4 de la ficha 1.

Hemos organizado los grupos siguiendo el criterio de las maestras. Una vez que han leído la ficha, han optado por hacerlos homogéneos en cuanto a habilidades a la hora de resolver problemas pues no querían que los alumnos con más habilidades resolvieran el problema y los demás estuvieran en una actitud pasiva. Todos los grupos debían aportar alguna solución para que se les otorgara un punto positivo al finalizar la clase. Por cada opción adicional propuesta y explicada se les otorgaría un punto más. Esta propuesta de los puntos positivos ha surgido de la maestra del aula A: es la estrategia que está intentando seguir esta semana en clase para calmar y motivar a los alumnos. Dice que llevan una semana muy inquieta y que no logran centrarse. Hemos observado que este comportamiento también se da en el aula B, por lo que hemos propuesto la misma iniciativa.

Se ha dejado a los alumnos tiempo para trabajar los problemas de la hoja en el orden que ellos quisieran. Se les ha pedido que leyeran todos los enunciados y se pusieran de acuerdo en el grupo para establecer el orden de trabajo. Cada alumno debía reflejar en su hoja las conclusiones a las que habían llegado, si daban con más de un procedimiento debían recogerlos, pero ningún equipo ha llegado a dar con más de un procedimiento a la hora de trabajar. Sí se han llegado a ver varias estrategias en el momento de corregir los problemas. Hemos observado que en algunos grupos han decidido repartirse los cuatro problemas de la hoja para trabajarlos por parejas. Esto no les ha resultado muy productivo pues no les ha dado tiempo a contarse en el grupo los cuatro problemas y si una pareja se bloqueaba en su problema no podía avanzar ni incorporarse a la dinámica de la otra pareja. Para que esta estrategia funcione más allá del copiar la forma de resolverlo se requiere trabajo individual por parte de cada alumno. Aunque el trabajo sea en grupo cada alumno tiene que pensar y trabajar individualmente el problema; en caso contrario, no es posible comprender lo que te están dictando.

6.1. Ficha 3 – Problema 1

Para el equipo de fútbol se han comprado 17 pares de botas que han costado 153 euros. El club de su amigo Jaime tiene que comprar 34 pares de botas del mismo tipo, ¿cuánto tendrá que pagar?

Este primer problema se había trabajado la semana anterior con los alumnos de 6.º de Primaria. En esa ocasión se propuso exactamente este mismo enunciado, y en la misma ficha había otros problemas de características similares pero con números de un orden de magnitud superior y otros donde la relación doble-mitad se había cambiado por triple-un tercio. Se proponía para estudiar las estrategias empleadas y ver principalmente si utilizaban hechos numéricos conocidos o más bien determinaban el precio unitario recurriendo a una división. En 6.º de primaria solo el 7 % de los alumnos utilizó hechos numéricos conocidos, mientras que el 90 % de los alumnos recurrió a una división para calcular el precio unitario.

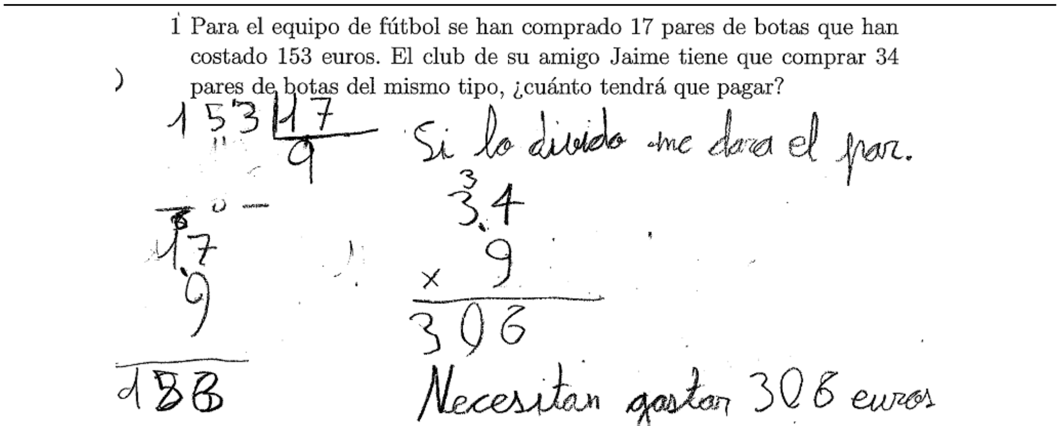
Entre los alumnos de cuarto hemos observado las siguientes estrategias:

- Reducción a la unidad, cálculo del precio unitario. Hay tres grupos que han llegado a plantear la división $153 : 17$, pero solo uno ha persistido en ella incluso cuando no sabían resolverla, los otros dos grupos han cambiado de estrategia, como comentamos a continuación. El grupo que ha persistido en la división ha pedido ayuda, y les hemos preguntado si conocían la relación entre la división y la multiplicación. No han contestado. Les hemos sugerido que buscaran números que al multiplicar por 17 se aproximaran a lo que han pagado. Nos han contestado que necesitaban saber el precio de un par y para eso tenían que dividir. Han empezado a plantear la tabla de multiplicar por 17 y finalmente han «resuelto la división» (figura 4.21.A).

- Reducción a la unidad, cálculo del precio unitario por ensayo y error. De los tres grupos que han determinado el precio unitario por ensayo y error, dos de ellos habían intentado primero encontrar el precio unitario a partir de la división, pero al no saber cómo afrontarla han cambiado de estrategia. Uno de ellos ha empezado por multiplicar 17×10 y al siguiente intento ya lo ha obtenido. Los otros dos han empezado por números inferiores, desde multiplicar por 6 o 7 (figura 4.21.B).

- Hechos numéricos conocidos. 5 grupos han considerado la relación doble mitad que hay entre la cantidad de zapatillas a comprar y las que ya se han comprado. Una vez encontrada esta relación a partir de la suma de $17 + 17 = 34$ o la resta de $34 - 17 = 17$ para determinar el precio unos han optado por hacer una multiplicación y otros una suma (figura 4.21.C).

A - Precio unitario: división



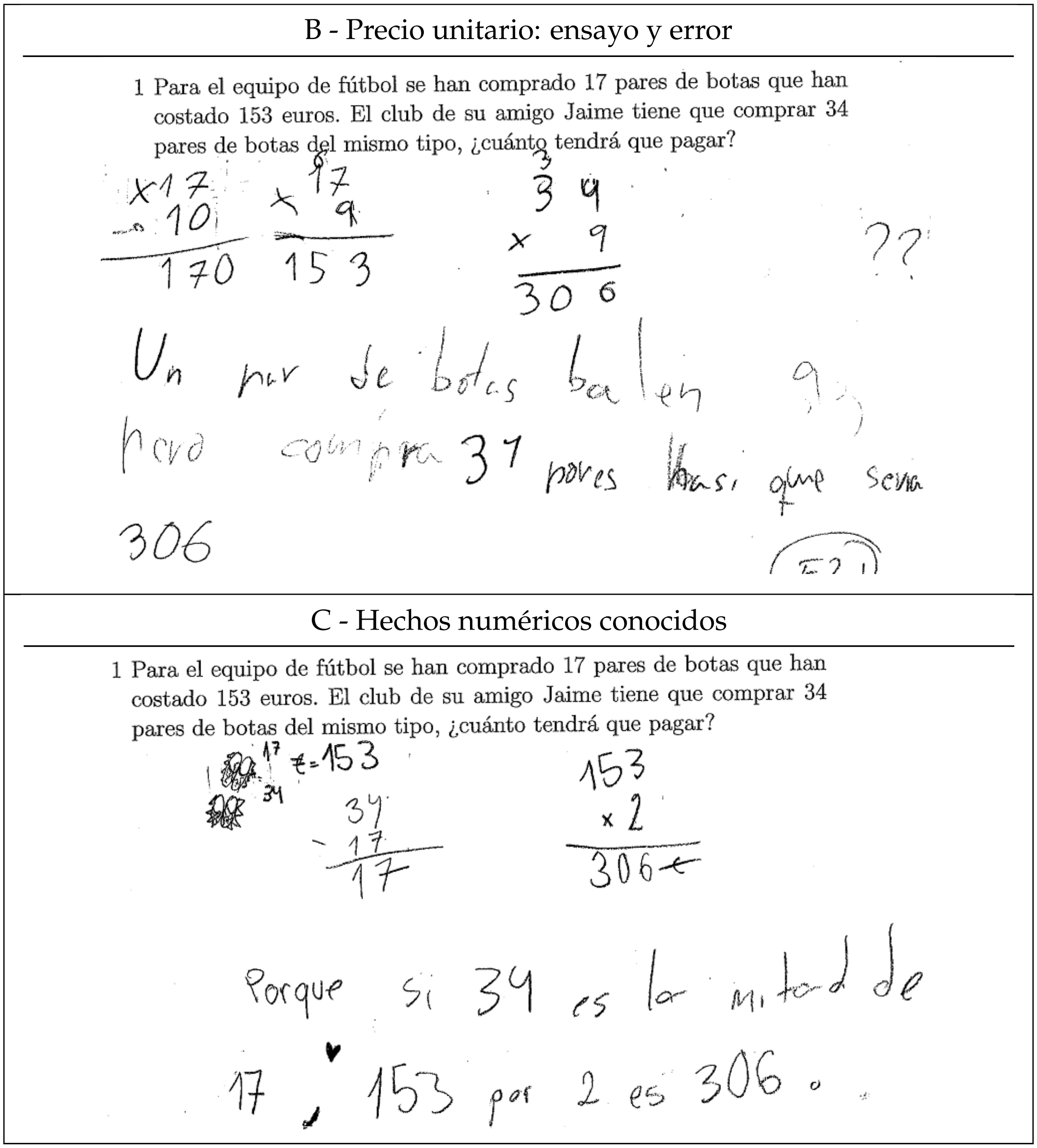


Figura 4.21: Ficha 3. Problema 1. Diferentes estrategias de resolución.

- Cálculos sin sentido. Hacen varias operaciones y descartan aquellas cuyo resultado les parece poco razonable. En el caso del equipo en el que está el alumno 4A-3, figura 4.22, hemos observamos que sus compañeros o bien han dejado el problema en blanco o como nos explica uno de ellos «hemos hecho muchas cuentas, ves, pero no están bien». El alumno 4A-3 nos explica que ha buscado «calcular el precio cuando compro muchas cosas». Como la cantidad le parece muy elevada, cambia y multiplica por dos. Cuando le preguntamos si han debatido esta forma de resolver el problema en el grupo, uno de los compañeros se explica en términos similares: «es que haces la operación y vemos si puede gastar tanto dinero o no» (C3. P24). Contrastamos una vez más que la comprensión de los alumnos sobre las operaciones es baja. Y esto dificulta el desarrollo del sentido de proporcionalidad (Lo y Watanabe, 1997).

- Dos grupos lo han dejado en blanco. Les hemos visto trabajar en el problema pero ninguno de los integrantes del grupo ha plasmado finalmente una solución en su hoja de problemas.

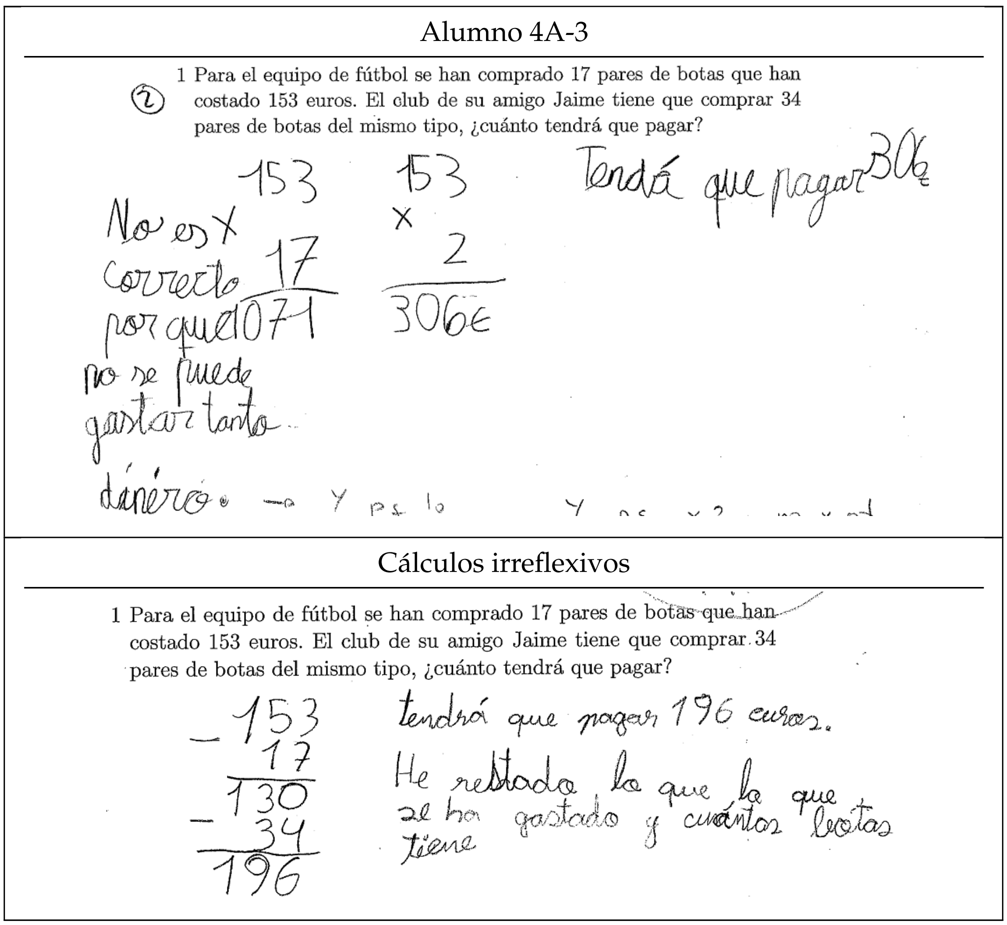


Figura 4.22: Ficha 3. Problema 1. Alumnos que no comprenden la relación de proporcionalidad planteada en el problema.

Esta dinámica de trabajo en la que el problema se resuelve en equipo y luego se deja libertad a los alumnos para que cada uno a nivel individual recoja el trabajo escrito de forma autónoma les ha desorientado un poco. Algunos grupos querían imponer el que todos recogieran la misma solución y esto ha originado alguna fricción; en otros casos, alumnos que no están convencidos con la respuesta del grupo han optado por contestar lo que ellos creían que debían contestar. También hay equipos que copian la solución al dictado de uno de los integrantes. Finalmente, algunos alumnos completan el trabajo con aportaciones propias, como sucede con el alumno 4B-3 que por su cuenta calcula el total de dinero gastado, el resto de sus compañeros no llegan a contestar así (figura 4.23, una situación similar se muestra también en el la figura 4.22).

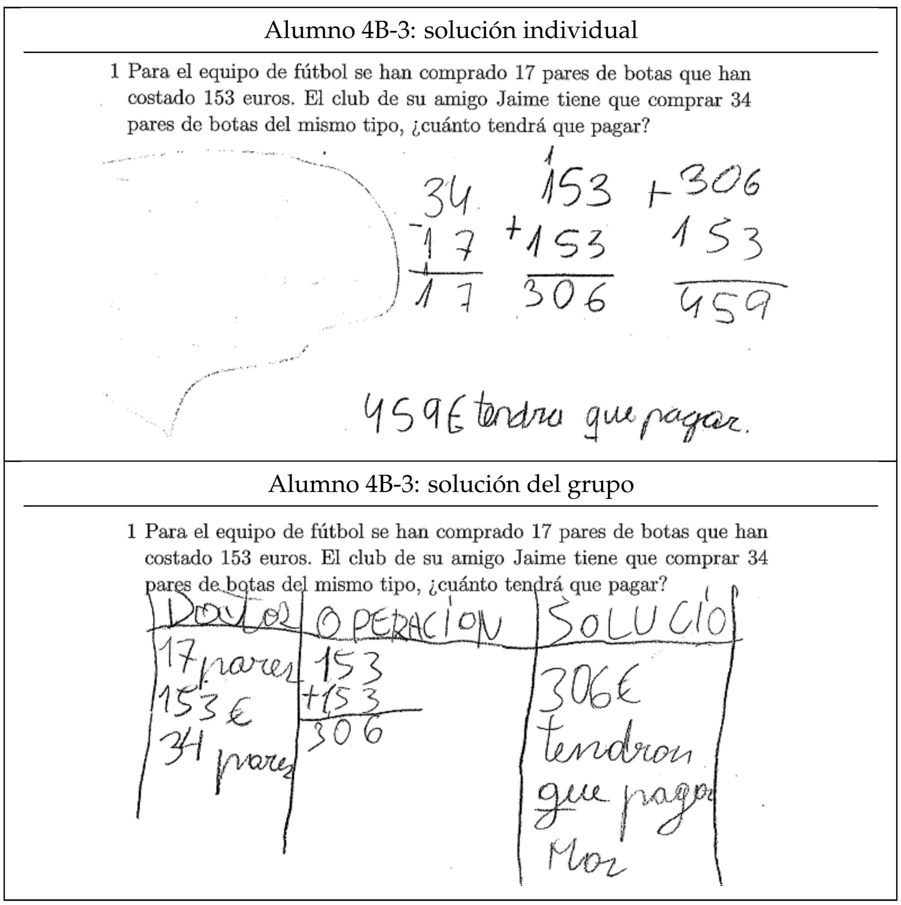


Figura 4.23: Ficha 3. Problema 1. Discrepancias entre la interpretación individual y el grupo de trabajo.

Hemos propuesto esta forma de trabajar como iniciación a la metacognición: «si has trabajado un problema en grupo plasma con tus propias palabras y de acuerdo con tu estilo personal lo que has entendido y cómo lo resuelves». Con ello buscamos que el alumno no solo resuelva el problema sino que reflexione sobre el procedimiento y solución obtenida para «apropiarse de él». Se busca también que adquiera espíritu crítico al plasmar las soluciones aportadas por otros y obviamente que «hable y escriba matemáticas». Lo que hemos observado es que en términos generales se explican bastante menos en la hoja de problemas, discuten y hablan pero finalmente no recogen la explicación en la hoja de trabajo.

6.2. Ficha 3 – Problema 2

María ha abierto su hucha, se gasta la mitad del dinero que tenía ahorrado en un par de patines y después se gasta ocho euros en un libro. Si ahora le quedan 26 euros, ¿cuánto dinero tenía ahorrado?

La reacción típica en este problema ha sido la de «me faltan datos». En el diálogo que hemos captado en uno de los grupos del aula C, y que casi se había repetido literalmente en otro grupo del aula A, el alumno que toma la iniciativa está pidiendo tiempo mientras copia todo el enunciado del problema en su hoja; uno de sus compañeros se queja de ello, «que ”pesao”, ¿has terminado ya?» (C3. P26):

- Vamos a empezar a sumar los datos que tenemos, que eso sí lo sabemos. $26 + 8$, nos da cuánto tienes, tienes que sumar lo de los patines, pero no sabemos cuánto es ese dato.
- Es que eso no viene.
- Ah, vale, se gasta la mitad en los patines. Entonces sí tienes eso.
- ¿Cómo? (C3. P26)

Y resuelve el problema en su hoja mientras relata en voz alta lo que está escribiendo: «26 euros que le quedan y 8 que se ha gastado y esto es la mitad, tenía ahorrado 68 euros» (C3. P26). En este grupo no ha habido mucha participación ni debate a la hora de resolver este problema, los otros miembros del grupo han seguido al alumno que ha tomado la iniciativa y luego cada uno ha resuelto en su hoja de problemas de una forma distinta.

Uno de ellos, que ha hecho un pequeño dibujo mientras leían el enunciado, se siente más cómodo haciendo la suma. Otro alumno sólo se ha quedado con la idea de las operaciones, pero no las hace en el orden correcto. Decide poner una resta pues observa que sus compañeros están en ese momento en otro asunto, pero ninguno de ellos presta atención al error que está cometiendo (figura 4.24).

En un grupo del aula B que parte de la misma situación («nos faltan datos»), uno de los alumnos propone:

- Buscar las cantidades y hacer las cuentas. Por ejemplo si tenía 80 euros y se gasta la mitad luego tiene 40 y se gasta 8 pues tiene 26.
- Ah, claro.
- Pero está mal, $40 - 8 = 36$ está mal. (C2. P26)

Se quedan todos callados y tardan un rato en sugerir que pueden probar con otras cantidades; no llegan a dar con la cantidad correcta ni a dar la vuelta al razonamiento.

A otro grupo les vemos anotar finalmente la resolución «marcha atrás», en la hoja de trabajo han resuelto correctamente el problema y al transcribir al papel parece más bien que están comprobando el resultado que han obtenido. En este grupo les hemos visto ponerse de acuerdo para transcribir todos la misma solución (figura 4.25).

Por último, ha habido cuatro grupos que no han sabido organizar la secuencia temporal. Estos alumnos primero doblan los 26 euros que sobran y luego suman los 8 euros del libro. Hay un grupo que no solo omite una de las etapas del problema (solo suma los 26 y los 8 euros) sino que además ha considerado que debía redondear los resultados pues es lo que en estos momentos están trabajando en el libro de texto. Su solución es 30 porque 34 se aproxima a 30 euros. Como ya habíamos comentado en tercero, la forma en la que se trabaja la aproximación no parece la más adecuada. Y también se da el caso de un grupo que va haciendo cuentas buscando un resultado coherente pero no concluye adecuadamente.

En la corrección grupal hemos pedido que nos expusieran sus formas de resolver el problema, se han ido anotando todas en la pizarra sin hacer ningún comentario y una vez que todas estaban recogidas se les ha pedido a los alumnos que las valoraran. Los alumnos que han comprendido y solucionado correctamente el problema han sabido explicar también los errores de las estrategias que no son correctas. La más elaborada es la que ha mostrado el grupo que en sus anotaciones había trabajado «marcha atrás, comprobando

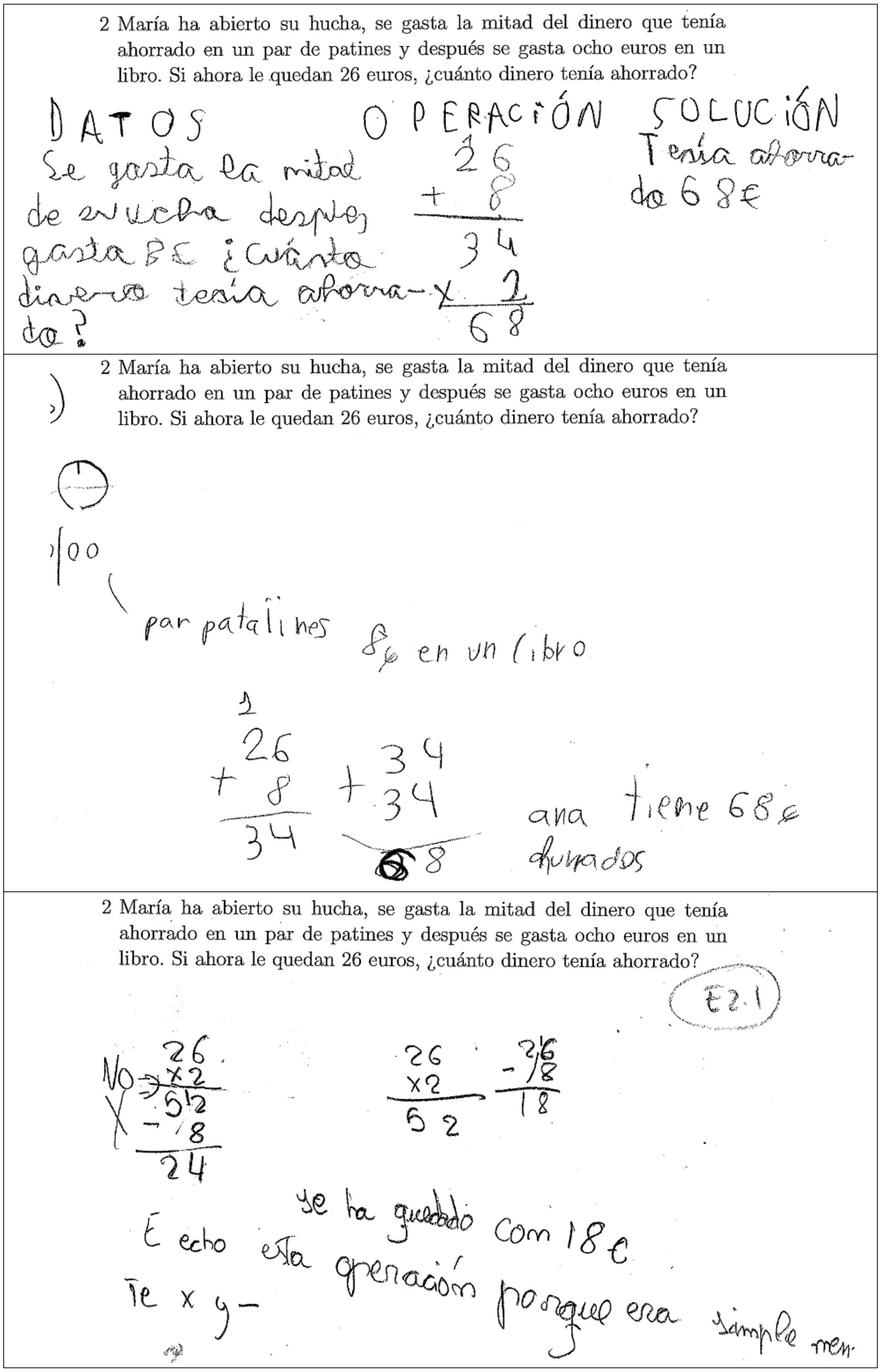


Figura 4.24: Diferentes versiones individuales del mismo trabajo en grupo.

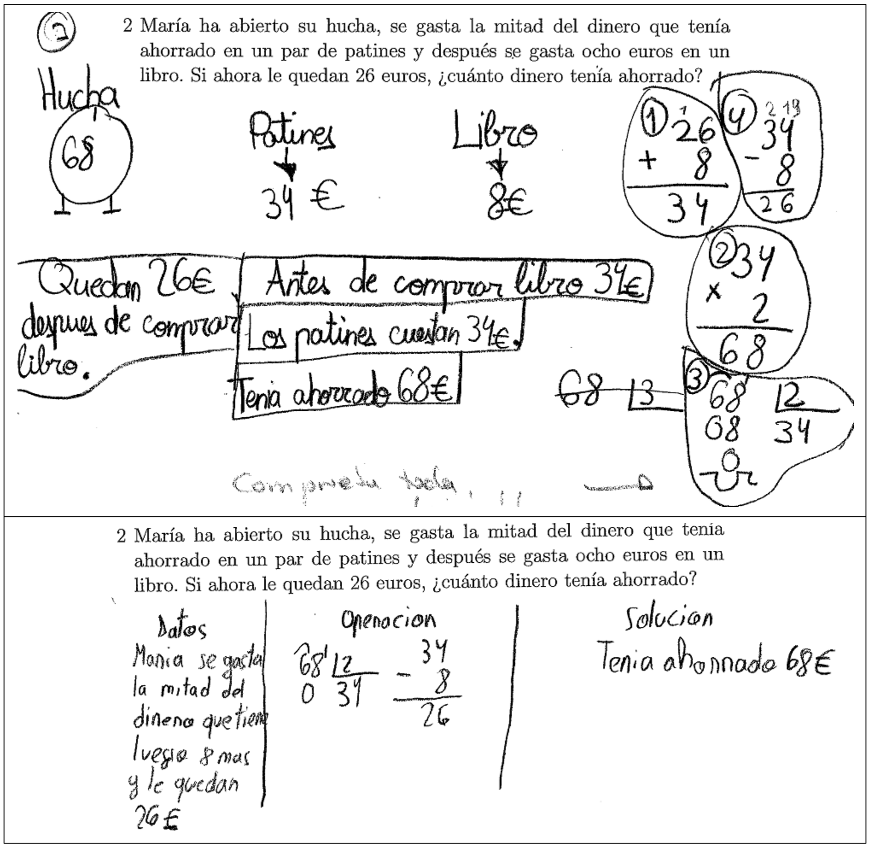


Figura 4.25: Versiones individuales coincidentes.

la solución». Sus argumentos han sido precisamente el de primero dividir y luego restar los 8 euros y comprobar que en las soluciones que no son correctas no sobran 26 euros. No en todas las clases se han dado todas las estrategias erróneas, en cada clase se han analizado solo las que los alumnos han propuesto.

Las dos soluciones erróneas que se han dado con mayor frecuencia responden a una deficiente comprensión de la secuencia temporal del problema: unos han considerado que el coste de los patines no es la mitad del total sino la mitad de otras cantidades que aparecen en el enunciado; esto es lo que ocurre en la figura 4.26, y por ello su respuesta es $26+8+17$. Otros han duplicado los 26 euros y a estos suman los 8 para determinar la cantidad inicial; esta segunda manera de proceder fue la causa de error principal en tercero.

Solo en el momento en el que hemos propuesto nuestra solución gráfica a partir de un modelo de barras, algunos alumnos se han dado cuenta de que el problema ya lo habíamos trabajado, pero en 4.º ninguno ha recurrido a hacer una representación pictórica tal y como ya hicimos en 3.º

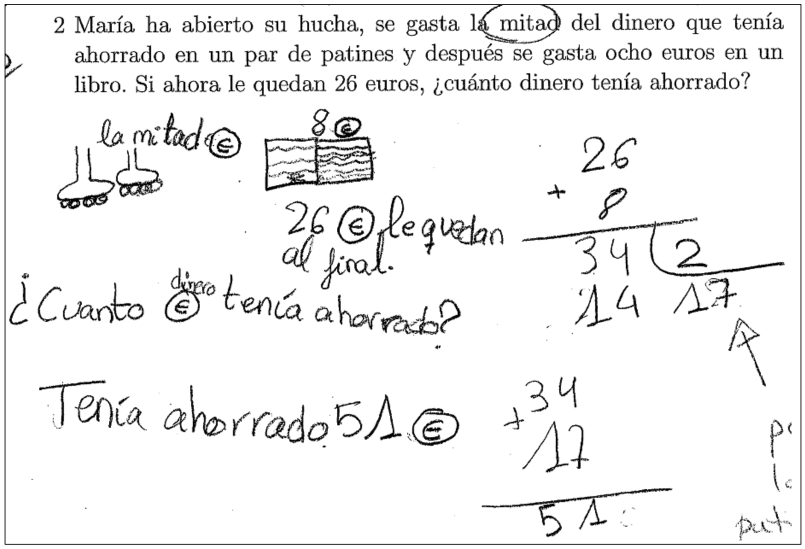
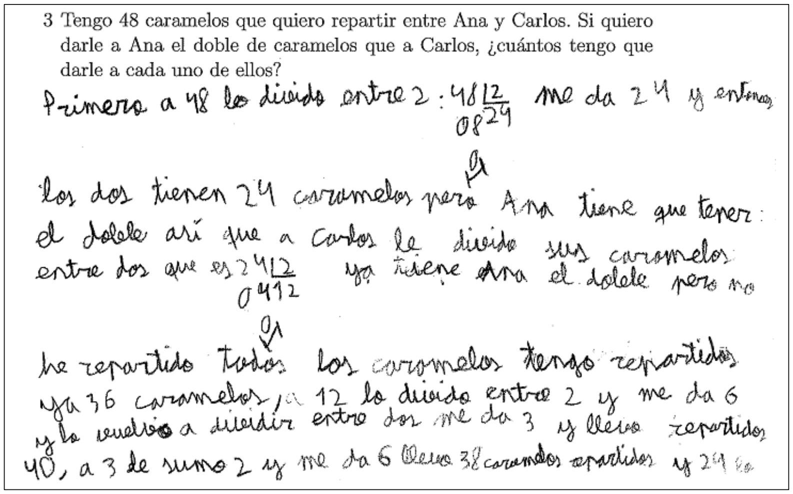


Figura 4.26: Interpretación errónea de la secuencia temporal.

De acuerdo con nuestra propuesta de análisis de errores planteada en el capítulo 2, este error de comprensión se traduce en una representación mental errónea del problema (véase la figura 2.2, p. 83). Hemos podido observar que, si el alumno se ha creado una interpretación inicial inadecuada, y después resuelve el problema de acuerdo con ella (y por tanto de forma incorrecta), es difícil hacerle comprender que su respuesta numérica no es válida, y por qué.

Los problemas que requieren de la técnica de «empezar por el final» («work backwards») no parecen trabajarse en el aula; en algunos libros de texto, especialmente en aquellos que incluyen un apartado sobre heurística de resolución de problemas y en los cursos superiores de 5.º y 6.º de Educación Primaria, aparece ocasionalmente esta técnica explicada. Lo que no se hace en ningún caso es recurrir a un dibujo sencillo que permita representar adecuadamente el problema. El modelo de barras al que nos hemos referido en otras ocasiones parece ser una buena herramienta en muchas situaciones.

Esta problemática no es exclusiva de nuestro país. En el estudio realizado en 2009 por el «Center for research in pedagogy and practice» de Singapur sobre el estado de la resolución de problemas en las aulas de ese país (Teong, Hedberg, Ho, Lioe, Tiong, Wong y Fang, 2009) analizan el repertorio de heurísticas de resolución de problemas empleadas por una serie de profesores y alumnos de 5.º de primaria y 1.º de secundaria y se observa que esta técnica es utilizada solo el 2 % de las veces por los profesores y nunca por los alumnos (Teong et al., 2009, pp. 27-28).



3 Tengo 48 caramelos que quiero repartir entre Ana y Carlos. Si quiero darle a Ana el doble de caramelos que a Carlos, ¿cuántos tengo que darle a cada uno de ellos?

Primero a 48 lo divido entre 2 : 48|2 08 24 me da 24 y entonces los dos tienen 24 caramelos pero Ana tiene que tener el doble así que a Carlos le divido sus caramelos entre dos que es 24|2 04 12 ya tiene Ana el doble pero no he repartido todos los caramelos tengo repartidos ya 36 caramelos, a 12 lo divido entre 2 y me da 6 y lo vuelvo a dividir entre dos me da 3 y llevo repartidos 40, a 3 le sumo 2 y me da 6 llevo 38 caramelos repartidos y 24 ...

Figura 4.27: Ficha 3. Problema 3. Repartos sucesivos.

6.3. Ficha 3 – Problema 3

Tengo 48 caramelos que quiero repartir entre Ana y Carlos. Si quiero darle a Ana el doble de caramelos que a Carlos, ¿cuántos tengo que darle a cada uno de ellos?

En la mayoría de los grupos no se han dado cuenta de que este problema ya lo habían trabajado el curso pasado, pero sí ha habido alumnos que han entendido que se trataba de un problema de repartos que podría escribirse como una división y que con la ayuda de material manipulativo podían resolverlo más fácilmente. Esta situación se ha dado sobre todo en las aulas B y C, que es también donde se ha recurrido con mayor frecuencia a hacer un dibujo.

La estrategia más común ha sido la de hacer divisiones sucesivas: $48 : 2$ y $24 : 2$, y le dan a Ana 24 rotuladores y a Carlos 12. Al preguntarles cuántos rotuladores han repartido en total, en la mayor parte de los grupos han concluido que está mal: «pero que Ana tiene el doble que Carlos», « no, esto está mal. Como Ana tiene el doble, tiene el doble que Carlos, pero no está bien» (C3. P28). Solo en uno de los grupos han llegado a la conclusión de que podían hacer lo mismo con los que todavía no habían repartido, y han tomado $12 : 2$, le han dado 6 a Ana y 3 a Carlos y al concluir que llevaban repartidos 45 caramelos no han sabido seguir. Todo su planteamiento es aritmético en las hojas de trabajo grupal aunque un alumno del grupo decide recurrir a la narrativa en su hoja individual (figura 4.27).

En otro grupo, al plantearles la misma pregunta, han empezado a hacer un dibujo pero

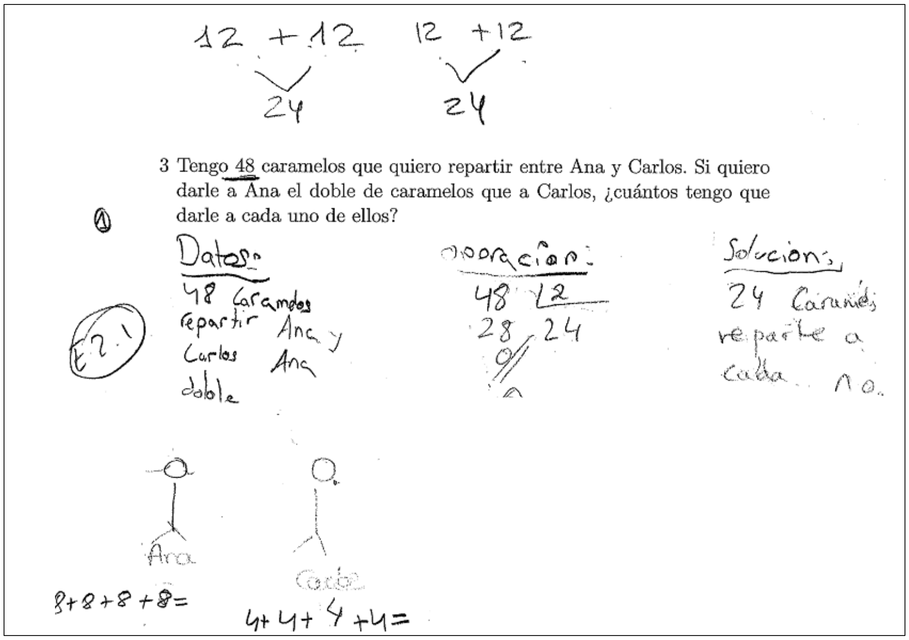


Figura 4.28: Ficha 3. Problema 3. Solución por lotes.

pronto han abandonado; optan por ir repartiendo de 4 en cuatro y de 8 en 8 como muestra la figura 4.28. Pierden con frecuencia su hilo de razonamiento inicial, no saben continuar con él o llevarlo a buen puerto, incluso cuando este es correcto. En el diálogo con ellos intentamos que lo recuperen:

I: Imaginad que tengo todos los caramelos aquí, en un montón en la mesa. Si empiezo a repartir de 8 en 8 para Ana y de 4 en 4 para Carlos como has escrito aquí, ¿hasta cuándo puedo seguir?

A4: Hasta el final.

I: Hasta el final, ah ya. Y cuando llega el final, ¿cómo sabes que has llegado al final?

A4: No lo sé.

A14: (Este alumno no ha escrito nada en su hoja de trabajo), cuando ya no hay caramelos que repartir.

I: Cuando ya no hay caramelos que repartir, esa parece una buena idea. Bueno, y si vemos cuántos le has dado aquí a Ana y cuántos a Carlos, ¿vale? (Sumamos, comprueba que en su dibujo ha llegado a 32 para Ana y 16 para Carlos pero no saben conectar con el problema). (C1. P28)

Dejamos al grupo en este punto. Ninguno de los integrantes llegó a formular una fra-

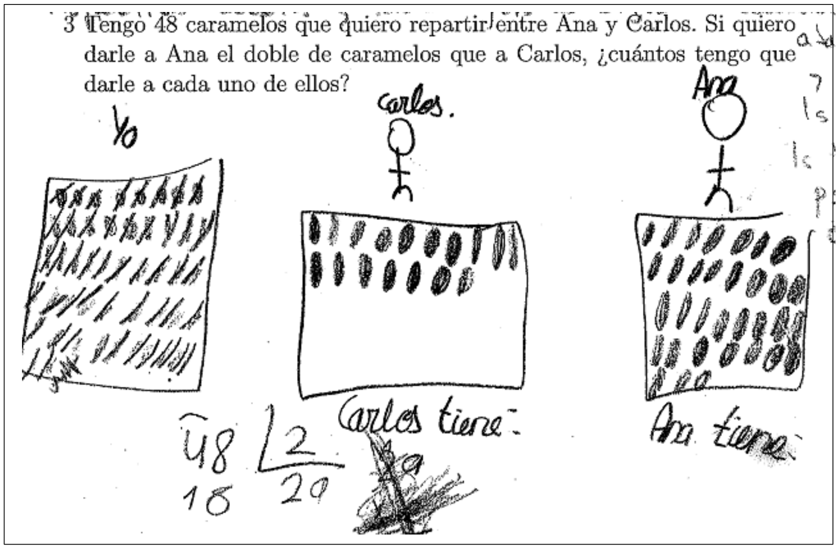
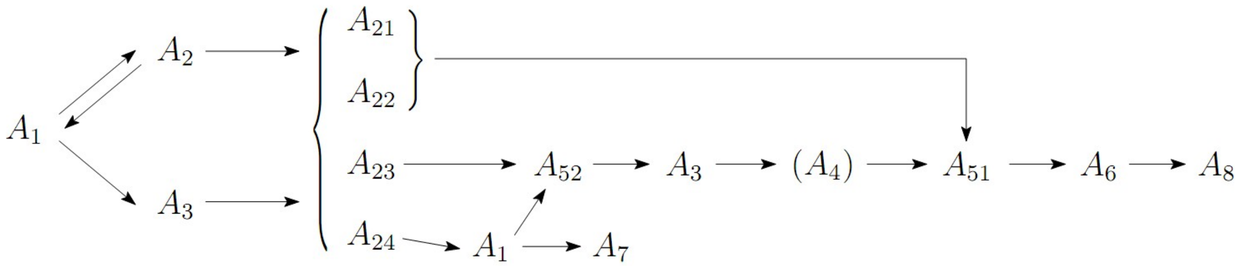


Figura 4.29: Ficha 3. Problema 3. Solución gráfica.

se de respuesta en su hoja de trabajo. Nuestra interpretación es que han entendido las condiciones en las que debe efectuarse el proceso pero no saben concluirlo pues no han comprendido hacia dónde queríamos conducirles con la comprobación parcial de las cantidades ya repartidas y por otro lado no han sabido identificar la relación doble mitad en el reparto $32/16$. No llegamos a preguntarles en ningún momento por qué habían optado por escoger la pareja de números 8 y 4 en lugar de otra cualquiera para no confundirles más.

Tanto en el aula B como en la C observamos otras estrategias: hay un grupo en cada una de estas aulas que recurre al material manipulativo tras intentar varias cuentas y en el caso del grupo del aula B son los únicos que en un determinado momento recuerdan haber trabajado un problema similar, el curso pasado. De hecho, llegan a preguntárselo a la investigadora. Hay otro grupo que observa su forma de proceder y también usan los rotuladores para hacer el reparto. El alumno que ha tomado la iniciativa y explica a sus compañeros que «es como dividir entre tres y luego juntas lo de dos para uno solo» (C2. P28) es el único que concluye el problema en su hoja de trabajo; sus compañeros intentan hacer el dibujo pero se pierden.

También en esta aula hay un par de grupos que deciden repartir a partir de un dibujo, como se muestra en la figura 4.29. La secuencia de lo que hemos observado en este grupo sería la siguiente:



Acción	Código	
• Leer el enunciado	A_1	
• Recoger los datos	A_2	A_{21} – datos contextualizados A_{22} – datos no contextualizados A_{23} – dibujo, esquema, representación simbólica A_{24} – repetición del enunciado, de la pregunta, pedir información al docente
• Confusión/Perplejidad	A_3	
• Plan de acción	A_4	Solo se puede afirmar algo sobre esta etapa cuando se les pregunta o se les escucha en la fase de trabajo en grupo. Los alumnos no lo reflejan en sus producciones.
• Cálculos y operaciones	A_5	A_{51} – Plantean las operaciones A_{52} – Efectúan las operaciones y obtiene el resultado
• Escriben una frase respuesta	A_6	
• Abandonan	A_7	
• Dan por terminado el problema	A_8	

Tabla 4.7: Esquema de la secuencia de resolución seguida por un grupo de alumnos del aula B.

En el aula C tenemos grupos que no van más allá del reparto $24/12$ y grupos que empiezan haciendo cuentas, pasan al material y concluyen al final solo poniendo la solución final y comprobando aritméticamente el resultado.

En la corrección grupal hemos recogido primero las diferentes propuestas y las hemos escrito en la pizarra. Hemos escrito una frase solución para cada una de ellas y después hemos leído el problema en voz alta para representar la historia, tomando 48 pinturas en la mano o representándolas en la pizarra digital y escenificando el proceso de reparto: cada vez que doy una pintura a Carlos, ¿cuántas tengo que dar a Ana? Esta forma de proceder la han comprendido la mayoría de los alumnos. Cuando hemos intentado explicar el reparto a partir de la secuencia de divisiones sucesivas que ellos han planteado ha sido más confuso, y no todos han llegado a comprender sus errores o cómo salir de la situación de bloqueo a la que habían llegado.

6.4. Consideraciones sobre lo observado hasta el momento

Las maestras están satisfechas con el trabajo en grupo. No se mostraban muy partidarias en un principio, pues su experiencia en otras asignaturas no había sido muy satisfactoria. La mayoría de los alumnos están motivados y son participativos. Al final de la sesión hemos tenido que hacer las cosas un poco más deprisa de lo deseable; incluso con dos sesiones, parece que cuatro problemas son muchos y hacia el final de las sesión empiezan a observarse actitudes más pasivas, algunos alumnos esperan a que el resto del grupo resuelva el problema y ellos copian la solución. Hay que cuidar también que el trabajo sea realmente colaborativo, que en el grupo haya interés por que todos entiendan la solución a la que han llegado. Se les ve apremiar a los compañeros que están callados o distraídos mientras se trabaja en el problema pero en el momento que toman la decisión de copiar en su hoja cada uno se preocupa de lo que él anota.

Hemos estado observando la secuencia de trabajo, las acciones que parecen ejecutar los alumnos mientras resuelven los problemas. No todos los alumnos recorren todas las etapas ni parece haber proceso secuencial, pero sí hemos observado que algunas de las acciones son excluyentes. Por ejemplo, no parece que estén leyendo al tiempo que hacen un cálculo, aunque algunos alumnos sí parece que ejecuten cálculos mentales en la segunda o tercera lectura del enunciado. Otras acciones, por el contrario, no son excluyentes, y se puede ir leyendo el problema y tomando nota de los datos. Observar y analizar con cuidado esta secuencia de acciones, el proceso de resolución por el que pasa el alumno, nos aportaría información relevante sobre cómo se está hablando el alumno a sí mismo, pistas sobre cómo ayudarle en su aprendizaje. Para profundizar en esta propuesta de investigación resultaría fundamental disponer de grabaciones de vídeo y audio de los alumnos. En este momento, esto choca fuertemente con nuestra cultura escolar, pero nos parece fundamental luchar contra el tabú de la presencia de micrófonos y cámaras de vídeo en las aulas, y es una de las vías de trabajo que pretendemos proseguir en el futuro. Disponer de registros visuales y sonoros detallados del trabajo de los alumnos nos permitiría hacer un grafo de las etapas de resolución para cada tipo de alumno e identificar quizás estilos de resolución (caminos de aprendizaje que en este caso serían más bien estilos de resolución) y obstáculos en cada uno de ellos y poder tomar acciones más concretas.

En la tabla 4.7 se recoge el diagrama de flujo seguido por un grupo de alumnos. Listamos a continuación los distintos hitos que hemos podido identificar cuando ellos resuelven los problemas. En la medida de lo posible hemos intentado seguir un proceso de observación minucioso sobre algunos alumnos en concreto a lo largo de las diferentes sesiones, observaciones que han sido realizadas tanto por las maestras como por la investigadora:

- Lectura del enunciado.
- Organización del espacio en Datos-Operaciones-Resultados.
- Toma de datos y/o representación icónica de los datos. Nueva lectura del enunciado.
- Algunos alumnos parecen mostrar un estado de desconcierto.
- Cálculo-operaciones (en contadas ocasiones, resolución mediante dibujos y gráficos).
- Propuesta de una solución (se concluyen las operaciones planteadas y se redacta una frase-respuesta).
- Explicación del proceso de resolución.
- Comprobación de la solución (Cuando les hemos preguntado a los alumnos si han comprobado la solución nos responden en la mayoría de los casos que sí, que lo han hecho. Si se les pregunta sobre cómo lo han hecho dicen haber repasado las operaciones. En general hemos comprobado que no es así, especialmente cuando son capaces de plantear una operación aritmética; si se observa que cuando son preguntados en ese instante comprueban los cálculos pero no si estos son adecuados o no).
- En casos muy concretos de desconcierto se opta por un cambio de estrategia o de planteamiento.

- Cada vez con menor frecuencia se observa que abandonan y pasan a otro problema.

No todos los alumnos pasan por todas las etapas, ni estas siguen un orden lineal, ni son igualmente transitadas (no parece que los alumnos le dediquen el mismo tiempo a unas que a otras). Por ejemplo, conjeturamos (pero no podemos afirmarlo, no disponemos de datos suficientes para ello) que la fase en la que más tiempo se invierte es en los cálculos, y parece ser la fase que a ellos les parece más importante. Importancia que quizás derive del excesivo énfasis que se pone en el resultado final. A esta fase le seguiría la de lectura del enunciado y/o de sus anotaciones sobre los datos numéricos; en ocasiones nos llega a parecer que leen de forma «obsesiva». Creemos que la costumbre de indicarle al niño «lee con cuidado, lee otra vez el enunciado» puede llevarle a pensar que la solución a sus dudas está en la lectura, más que en la reflexión y en la readaptación de lo que el enunciado dice y cómo se lo explica.

Por otro lado tomar nota de los datos, muchas veces descontextualizados, sin saber por qué ni para qué, solo es un camino rápido hacia el cálculo sin sentido, la respuesta al impulso resolutor-ejecutor del que ya hemos hablado en otras ocasiones. Por el contrario, pedir al alumno que reformule el problema con sus propias palabras y que antes de pasar a escribir explique, diseñe un plan de acción y estime un posible resultado, mueve el foco de los cálculos hacia los procesos de razonamiento. Las maestras de los grupos están convencidas de la importancia de pedirles que se expliquen. La tutora del grupo A nos dice «están mejorando, yo noto que resuelven mejor los problemas y además explican mejor lo que van a hacer, aunque esto no sea siempre lo correcto para llegar a la solución».

También estamos reconsiderando una nueva disposición en las hojas de trabajo, reservar un espacio fijo y bien delimitado para escribir la solución final, un espacio *adhoc* para reformular el problema con sus propias palabras y un espacio para contar lo que van a hacer y estimar el resultado. Lo hemos probado en la hoja de problemas de la secuencia de trabajo para interpretar la división que se muestra en la figura 4.14 y medir su impacto en el comportamiento de los alumnos en la resolución de problemas, nos parece una interesante propuesta de investigación para el futuro.

Para evitar los cálculos sin sentido como sumar euros con botas, restar o multiplicar los números del enunciado a la espera de que «estos te digan la solución», es importante que los alumnos vean resolver con calma los ejercicios y enfatizar el significado de todo lo que se hace: ¿qué significa sumar euros con canicas?, ¿cuándo voy a necesitar juntar ambas cosas? También es importante analizar todas las estrategias que se han dado para a partir de sus propios argumentos descartar las que no son válidas. Por otro lado, hay que recordar la importancia de hacer un buen dibujo y de pensar si el problema que se está resolviendo se parece a alguno que ya se ha resuelto en alguna ocasión. Y recordar que el cálculo es necesario para la resolución de los problemas, pero la reducción de las matemáticas y de los problemas a un número final parece estar asfixiando el razonamiento.

7. Análisis de las fichas 4 y 5

En las fichas 4 y 5 y las sesiones necesarias para desarrollarlas nos hemos centrado en trabajar el cálculo razonado y para ello se han diseñado una serie de actividades que se llevarán a cabo a lo largo de tres sesiones diferentes:

- Primera sesión de cálculo: balanzas numéricas.
- Segunda sesión: dictado y cerrar la caja.
- Tercera sesión: cuadrados numéricos con el dominó y dictado.

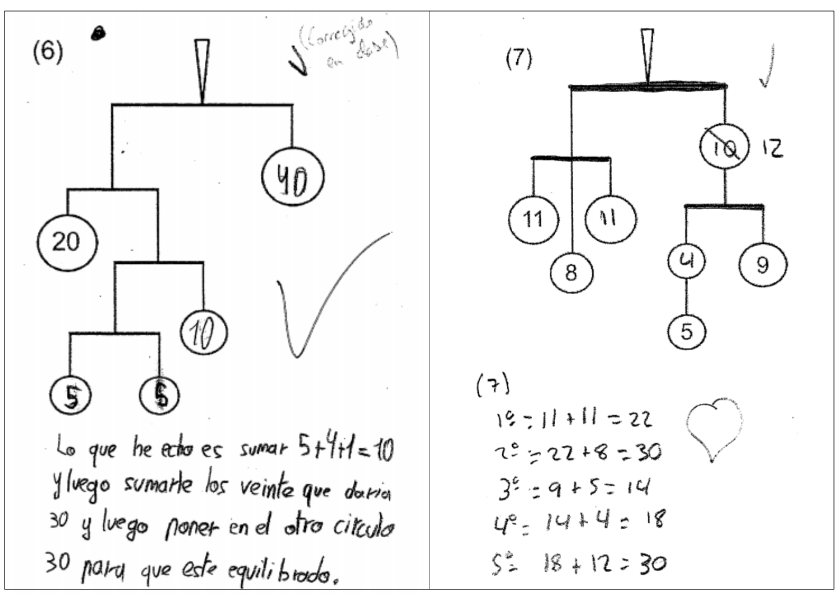
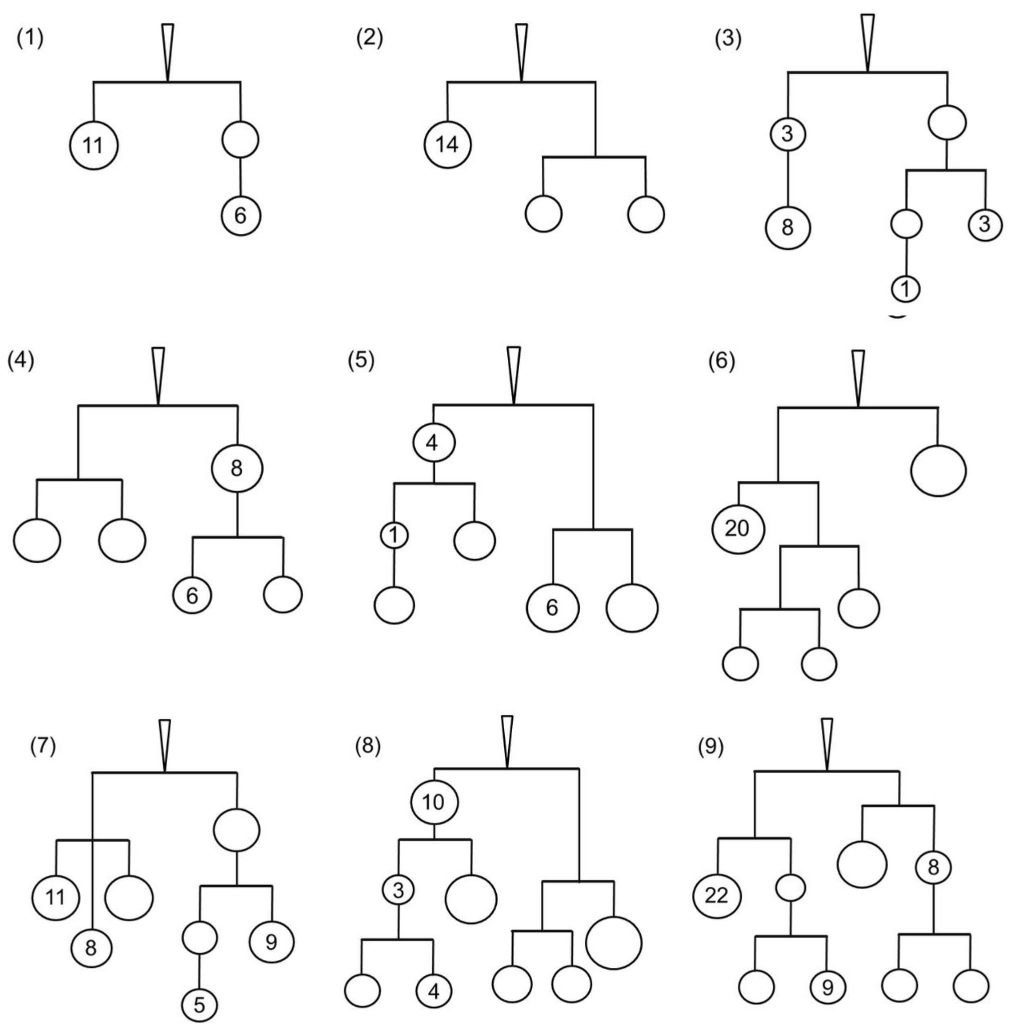


Figura 4.30: Ficha 4. Problema 1. Diferentes formas de explicar la solución.

Describiremos las actividades realizadas en la segunda y tercera sesión, pero queremos aclarar que algunas de ellas no responden al trabajo en resolución de problemas, sino que son ejercicios cuyo objetivo es mejorar las habilidades de cálculo, trabajar relaciones numéricas y pedir en todos los casos al alumno que explique su procedimiento de cálculo. La actividad de «Balanzas numéricas» permite, además de practicar el cálculo, poner en juego el pensamiento lógico y organizar la secuencia de resolución, lo que la convierte en un verdadero problema para estos alumnos. En todos los casos los alumnos han de explicar su procedimiento de resolución, tal y como se muestra en la figura 4.30.

7.1. Ficha 4 – Problema 1

Balanzas numéricas. Completa los números que faltan en estas balanzas. Ten en cuenta que todas ellas están equilibradas.



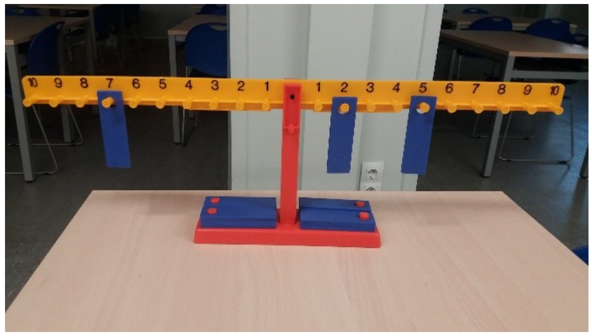


Figura 4.31: Balanza numérica.

En tercero ya habíamos introducido este ejercicio, pero el problema resultó bastante difícil pues no llegaron a comprender el funcionamiento «físico» y que este debía cumplirse en todos y cada uno de los niveles de la balanza. En aquella ocasión utilizamos el símil del columpio balancín. En esta ocasión, para ilustrar su funcionamiento hemos hecho uso de una balanza numérica como la que se muestra en la figura 4.31.

Hemos resuelto una serie de ejercicios sencillos para visualizar su funcionamiento al tiempo que representábamos gráficamente en la pizarra la situación para establecer las equivalencias y diferencias con los ejercicios de su ficha. En la balanza física no se puede trabajar con multiniveles. Pasamos después a analizar el primer ejercicio de su ficha para reproducirlo físicamente en la balanza. En el instante en que hemos escrito en la pizarra $11 = 6 + 5$, han protestado: «lo has hecho mal, tiene que ser $6 + 5 = 11$», a pesar de que habíamos tenido la precaución de escribir de izquierda a derecha al tiempo que narrábamos lo que escribíamos (como hemos hecho en todo momento). Esto ha pasado en todas las clases, y nos muestra una vez más los problemas de comprensión del significado del signo igual que ya habíamos detectado en el problema de los cromos de la ficha 1.

Los alumnos trabajan en parejas y se les pide que escriban su proceso de razonamiento, no basta con completar los huecos. Una vez que empiezan a trabajar por su cuenta hay varios alumnos que preguntan si hay alguna relación entre el número que hay que poner en el círculo y el tamaño de este. Les preguntamos «¿qué necesitamos saber para poder contestar a esta pregunta?», «solucionar alguna y ver qué pasa». Enseguida concluyen que sí hay relación, un círculo más grande indica un número más grande.

La ficha consiste en 9 ejercicios dispuestos de tres en tres y con orden de dificultad creciente. Contamos con 49 respuestas para los 6 primeros ejercicios. En el aula B la sesión no ha sido muy productiva; no se han podido trabajar las tres últimas balanzas pues la

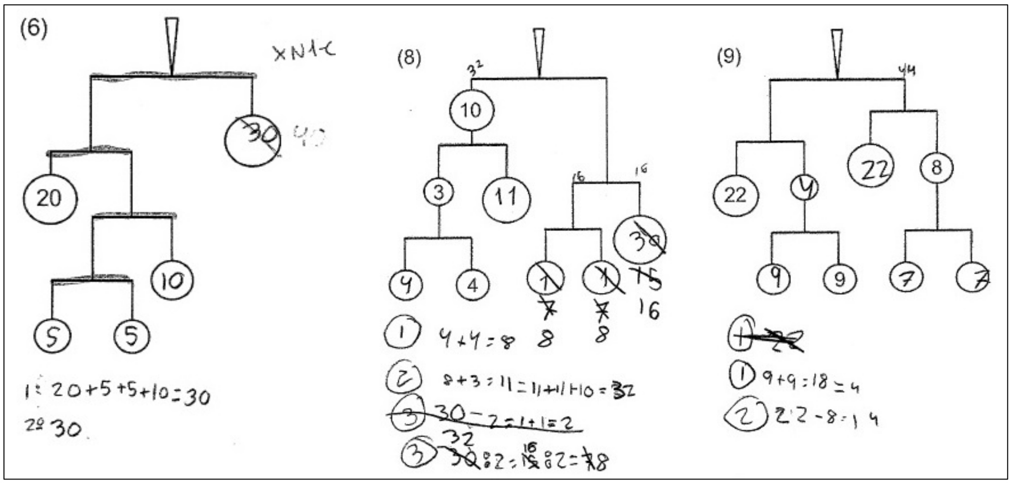


Figura 4.32: Soluciones del alumno 4C-18.

clase ha estado muy inquieta y varios alumnos han mostrado un comportamiento poco adecuado, lo que ha dado lugar a que se acortara la sesión a petición de la maestra. Solo contamos con 30 respuestas para las 9 balanzas. Ningún alumno ha llegado a resolver correctamente las 9 balanzas: hay 4 alumnos que han resuelto correctamente 8 balanzas, 5 que han resuelto correctamente 7 balanzas y 2 alumnos del grupo B que han resuelto correctamente las 6 balanzas sobre las que han trabajado. En total hay 13 alumnos que han fallado un máximo de dos balanzas sobre el total de las que han intentado resolver. Todos ellos muestran haber entendido el proceso y lo que les impide obtener la solución correcta es algún error aritmético. En la figura 4.32 se muestra el trabajo del alumno 4C-18. En el ejercicio (6) suma mal el total del brazo izquierdo, pero resuelve correctamente el resto de los apartados. Incluso cambia de estrategia una vez que empieza a resolver los casos más difíciles: en un principio evidencia con un rotulador cada uno de los niveles horizontales, en los que debe cuidarse de que estén equilibrados (ejercicio 6), mientras en el ejercicio 8 pasa a anotar el total parcial de cada uno de los niveles y calcula por ensayo y error.

En la figura 4.33 se muestra el porcentaje de aciertos para cada uno de los ejercicios de la actividad de las balanzas. Podemos observar que no hemos acertado a colocar los ejercicios en orden de dificultad creciente tal y como pretendíamos. La balanza número 4 ha resultado más fácil de resolver que la 3 y la 5. Aunque la número 4 puede parecer una composición más complicada, tiene un alto grado de simetría que no presentan las otras dos; esto es lo que también puede hacer más asequible la balanza 9 que la 8. En la balanza

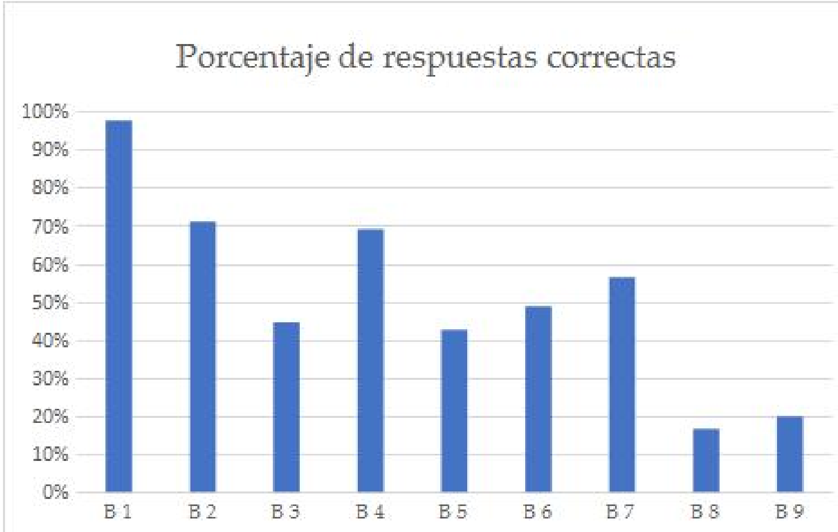


Figura 4.33: Porcentaje de aciertos en los ejercicios de balanzas.

6, aunque es muy asimétrica y tiene muchos niveles, en realidad solo hay que poner atención al resolver el brazo izquierdo que se complementa además con números sencillos; seguramente esto es lo que la hace más asequible que la 3 y la 5.

Hemos encontrado dos formas diferentes de explicar los procesos de resolución, que se pueden resumir con los ejemplos de la figura 4.34: hay alumnos, como 4C-10, que hacen uso del lenguaje narrativo; otros, como 4C-11, recalcan en color los distintos niveles horizontales que han de estar equilibrados y sobre ellos van anotando el valor numérico que les corresponde. A la hora de explicar numera la secuencia de trabajo según va calculando. Se puede observar también que en el nivel número dos del brazo derecho no ha equilibrado correctamente.

Muchos alumnos han considerado equilibrios parciales, buscando solo el equilibrio en un subnivel concreto, pero sin tener en cuenta que cuando hay niveles inferiores o superiores estos también deben estar equilibrados. Para categorizar los errores hemos numerado cada uno de los niveles de los que constan las balanzas de arriba abajo, como se muestra en la figura 4.35. El nivel en el que advertimos más errores es el segundo, ya que está condicionado tanto por los niveles superiores como por los inferiores, lo que complica la búsqueda de la estrategia adecuada. Y en balanzas como la 7, en la que un sub-árbol cuelga de un nodo, varios han interpretado que en ese nodo deben poner el peso total del sub-árbol situado por debajo de él. Con los alumnos que cometían este error analizábamos las balanzas 4 y 5, que muestran una estructura similar y donde el valor que corresponde

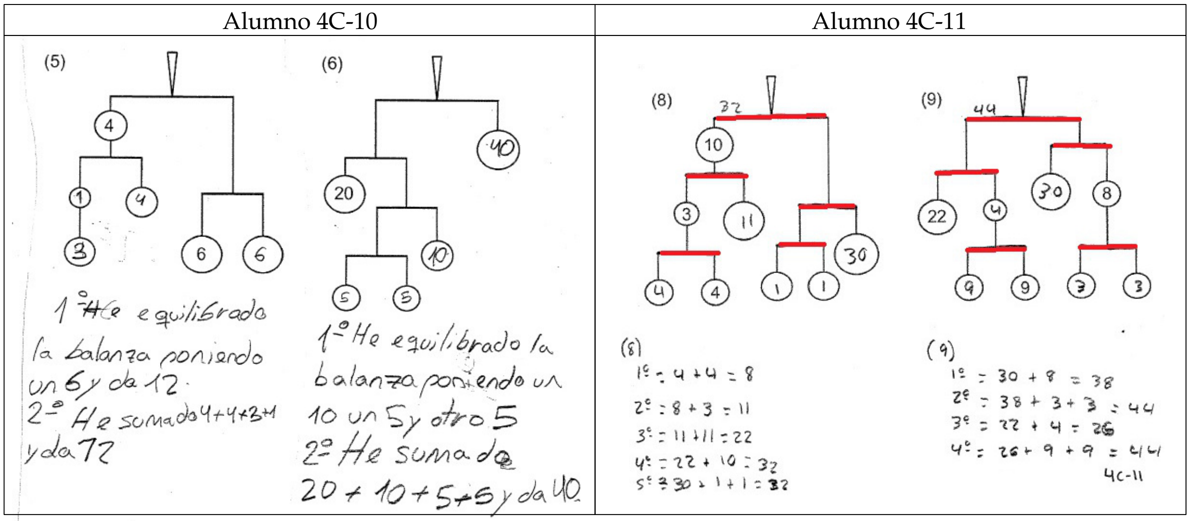


Figura 4.34: Modos de argumentación: narrativa y numérica.

a esta posición ya viene determinado en el enunciado.

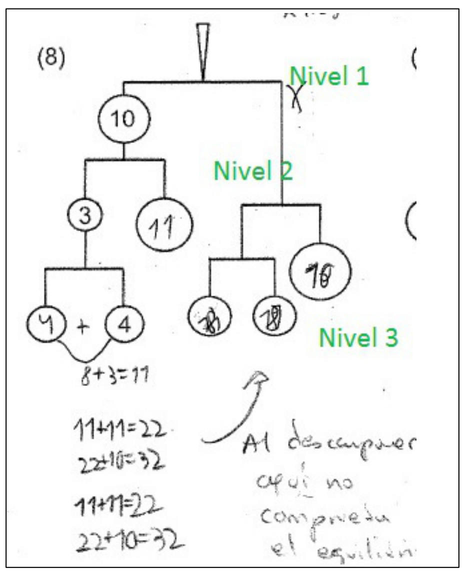


Figura 4.35: Balanza con error en los niveles 2 y 3.

Mientras corregíamos esta actividad el alumno 4A-9 ha propuesto inventar ellos su propia balanza; la idea ha sido aprobada con entusiasmo por sus compañeros y se les ha pedido que inventaran su propia balanza, la intercambiaran con el compañero y la resolvieran. En las aulas B y C ya hemos introducido esta variante como parte del enunciado inicial del problema. Hemos encontrado que hay aproximadamente el mismo número de alumnos que plantean esquemas sencillos que los que plantean esquemas muy elaborados, y

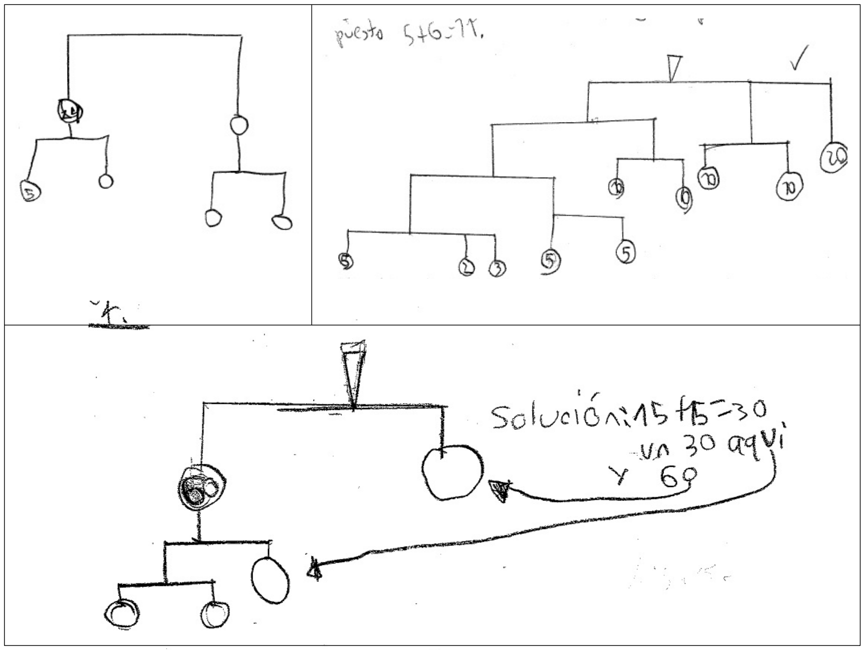


Figura 4.36: Balanzas propuestas por los alumnos. Algunas de respuesta abierta.

que ni ellos ni sus compañeros son capaces de resolver. Aparecen también propuestas de respuesta abierta aunque ellos no son conscientes de este hecho. En la figura 4.36 se muestran ejemplos de las propuestas de los alumnos. La figura 4.37 muestra un momento de la corrección.

Esta ficha, y en particular la posibilidad de plantear ellos sus propias balanzas, ha resultado bastante motivadora a pesar del nivel de dificultad conceptual que plantea. También ha funcionado en el aula B, a medida que completaban de cuatro a cinco balanzas les pedíamos que diseñaran su ejercicio; esta ha servido para tranquilizarlos y ayudarlos a centrarse en la tarea a pesar del comportamiento de alguno de sus compañeros.

Al cierre de la sesión hemos intentado analizar con ellos las estrategias utilizadas, y todos consideran que se resuelven «probando y poniendo cuidado en mirar todo y encontrar el orden».

7.2. Otras actividades de cálculo mental

Esta sección está dedicada al resto de las actividades de cálculo mental. En la segunda sesión los alumnos trabajaron en grupos de cuatro, cada alumno disponía de un juego de

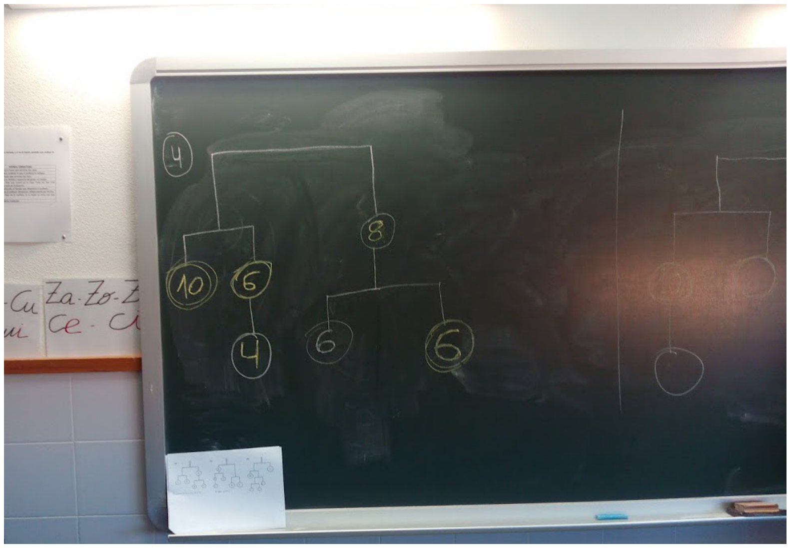


Figura 4.37: Pizarra en el momento de la corrección grupal.

tarjetas numeradas del 1 al 12 y dos dados convencionales por mesa (figura 4.38). Hemos adaptado las reglas del juego «cerrar la caja» para jugar con las tarjetas y en grupo en dos variantes diferentes: con la suma de lo obtenido en la tirada de los dados o con el producto, y descomponiendo el resultado de la manera que el alumno considere más conveniente. Por ejemplo, si hemos obtenido un 6 y un 5, podemos optar por sumar y buscar tarjetas que sumen 11 o bien multiplicar y buscar tarjetas cuya suma sea 30. Cada alumno al acabar su turno tiene que sumar las cartas que no ha conseguido cerrar y para ello ha de explicar en la hoja de papel el procedimiento de cálculo tal y como se observa en la figura 4.38.

En la actividad de «Dictado» la maestra dicta en voz alta una operación para la que el alumno debe obtener el resultado mentalmente y anotarlo en la hoja de papel (solo el resultado, no la operación). A continuación, debe explicar el procedimiento de cálculo tal y como se muestra en la figura 4.39. En la corrección grupal se discuten tantas formas de alcanzar el resultado como propuestas surjan por parte de los alumnos. La actividad no tiene otra finalidad que activar la «memoria de trabajo» («working memory», lo que uno mantiene presente en la memoria mientras realiza una tarea), hacer que los alumnos se esfuercen en buscar diferentes estrategias de cálculo y cómo explicarlas y valorarlas frente a las de sus compañeros. Algunos alumnos, una vez expuesta la forma en la que ellos han resuelto el ejercicio, han seguido buscando y explicando diferentes alternativas. En esos casos se les pedía que las valoraran: «aprender a hacer buenas elecciones en cada caso» como propone Brissiaud y «extender la red de relaciones numéricas conocidas más allá

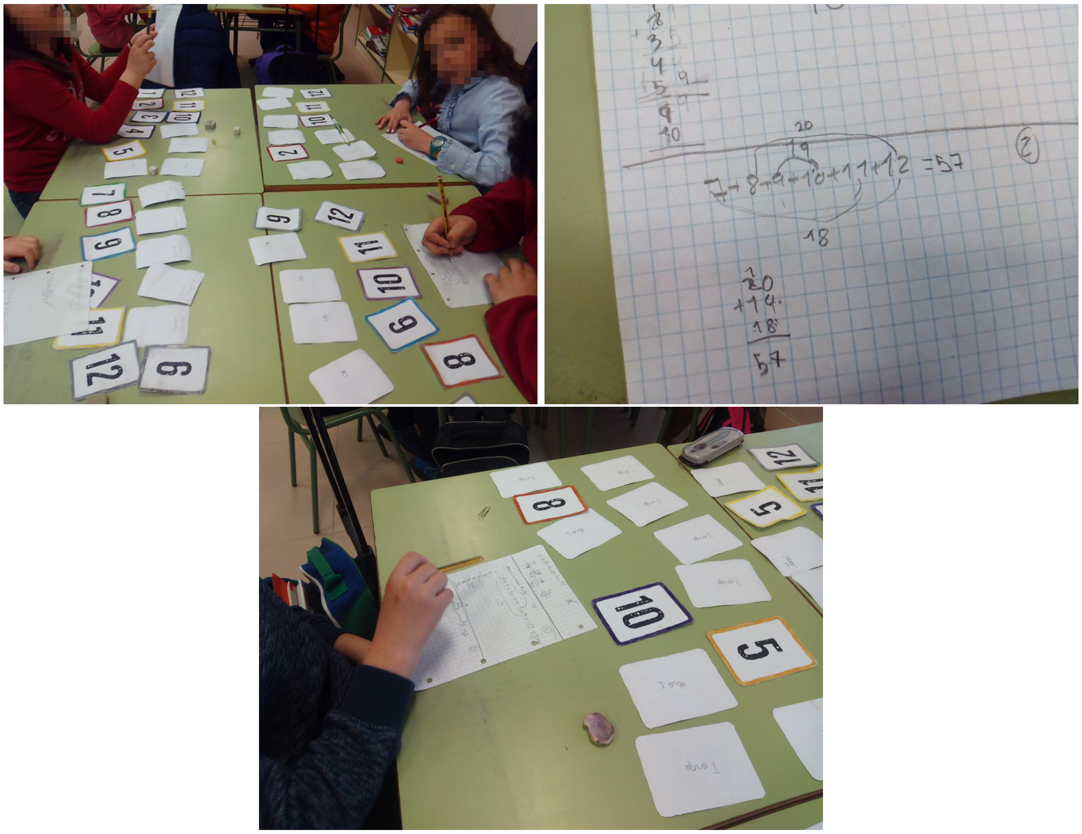


Figura 4.38: Cerrar la caja. Actividad de cálculo razonado.

de las relaciones de vecindad, y posibilitar que los alumnos pongan en práctica procedimientos espontáneos de cálculo pensado» (Brissiaud, 2003, p. 162; citado por G. Gálvez, D. Cosmelli, L. Cubillos, P. Leger, A. Mena, E. Tanter, X. Flores, G. Luci, S. Montoya y J. Soto, 2011, p. 9) et al.).

La forma habitual de trabajar el cálculo, limitada a la búsqueda de solución rápida sin tener que explicar cómo se llega a ella, tiende a desincentivar la exploración de estrategias alternativas, y prima la reproducción memorística de procedimientos más o menos estandarizados, como aprender de memoria las tablas de sumar o las tablas de multiplicar. Como hemos podido comprobar, esto suele producir un aprendizaje precario de estos temas que les lleva a cometer muchos errores y a olvidar pasos en la secuencia de los cálculos.

En la figura 4.39 se muestra el trabajo de varios alumnos para las siguientes operaciones:

- $34 + 59$
- $67 + 69$
- $40 + 61$
- $21 + 71$
- $24 + 89$

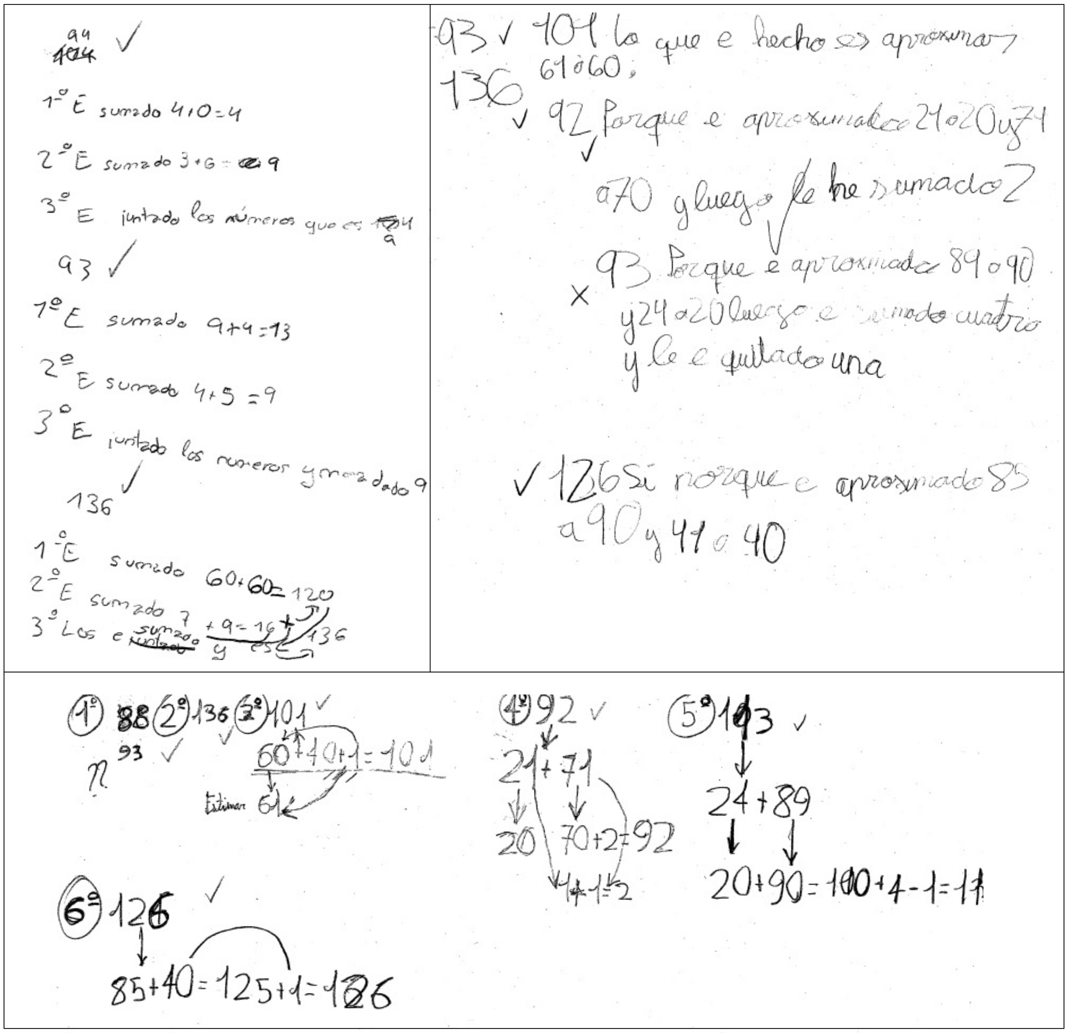


Figura 4.39: Dictado de cálculo mental. Hojas de trabajo de distintos alumnos.

En la actividad de «Cuadrados numéricos con el dominó»[4], los alumnos se organizan en grupos de cuatro y resuelven el puzzle proyectado en la pantalla. Para ello, cada equipo dispone de un juego completo de fichas de dominó. En el enunciado de cada puzzle se indican las fichas que hay que utilizar y cuánto deben sumar las filas y columnas, como muestra la imagen 4.40. Hemos empezado por propuestas sencillas como la de sumar 3 a partir de las cuatro fichas que se muestran en la imagen y que han de ir colocadas como se indica. Cada vez que un grupo daba con la solución se le ha pedido que explicara si esta es única o no y cómo se ha llegado a ella: «la ficha 2-1 tiene que ir sola porque ya

[4]Estos ejercicios son del libro Domino dominó, colección Ingenio de I. Torres Moliner y L. Soriano Puche, editorial Brief.

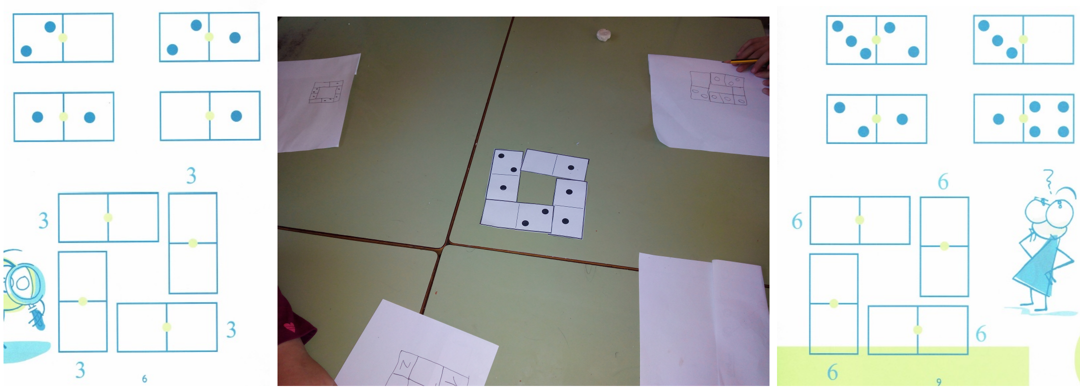


Figura 4.40: Puzzles de cálculo con fichas de dominó.

suma tres puntos y la ficha que tiene 1-1 tiene que ir entonces con la que es 0-1 y luego ya es probar» (C1. P34). Para la ficha que suma 6 nos han explicado que «hay dos fichas que suman 5, no pueden ir juntas una en un lado y la otra en otro» (C1. P34), pero justo esta estrategia no conduce a la solución y les ha tenido confundidos durante mucho tiempo. En la sesión ha dado tiempo a resolver propuestas con 4 fichas diferentes que suman de 3 a 8. Después se ha pasado a hacer dictado y trabajar estrategias concretas de cálculo mental.

Este tipo de actividades destinadas a potenciar el cálculo y el razonamiento ayudan a desarrollar el sentido numérico. Además, como es una actividad realizada en equipo y que ha de explicarse al grupo, permite obtener información sobre la «idea que se hacen de los números», y les ayuda a poner en práctica las propiedades básicas de la aritmética (asociativa, conmutativa y distributiva). El alumno hace uso de estas propiedades de manera flexible al sustituir un cálculo determinado por otro equivalente que le resulta más sencillo. Por último, consideramos que son actividades importantes para desarrollar su capacidad de concentración y atención y que ayudan a incentivar la búsqueda de estrategias alternativas en la resolución de problemas.

8. Análisis de la ficha 6

Una hormiga se cae en un agujero de 20 centímetros de profundidad. Intenta salir pero solo consigue ascender 10 cm durante el día y por la noche resbala y desciende 5 cm. ¿Cuántos días tarda en salir del agujero?

Esta es una adaptación del conocido problema de la rana:

> «A frog is at the bottom of a well that is 10 meters deep. During the daytime the frog climbs up the side of the well 4 meters, but at night it slides back 2 meters when it sleeps. At this rate, how many days will it take the frog to reach the top of the well?». (Lester, 1987)

El orden de magnitud de las cifras del problema se ha cambiado para permitir la resolución a partir de un sencillo dibujo. En el resumen de la conferencia organizada por el NCM de Suecia («National centre for mathematics education»), Lester (1987) nos hace saber que su larga experiencia como profesor le ha permitido observar que la mayoría de los alumnos mayores de 8 años (y los adultos) dice que la rana necesita 5 días para alcanzar la salida. A esta solución se llega siguiendo este razonamiento: la rana avanza 2 metros cada día, tardará 5 días en alcanzar los 10 metros. Por el contrario los niños menores de 8 años contestan en su mayoría, que la rana logra salir del agujero en 4 días. En esta misma conferencia hace también referencia a otros problemas igualmente conocidos para los que se obtienen resultados similares: los niños más pequeños los resuelven con más éxito que los mayores.

Nuestra experiencia con este problema corrobora esta apreciación: el problema se ha trabajado exactamente con el mismo enunciado en las aulas de segundo y de cuarto curso, y hemos comprobado que mientras que el 62,5 % de los alumnos de segundo responden correctamente, solo el 42,9 % de los alumnos de cuarto llegan a la respuesta correcta.

Los niños de segundo han hecho un sencillo dibujo y sobre este han resuelto el problema llegando a responder correctamente 25 de los 40 alumnos que trabajan el problema. La figura 4.41 muestra diferentes soluciones de estos alumnos.

Entre los alumnos de cuarto, de los 49 alumnos que han trabajado el problema solo 21 han llegado a la solución correcta (entre ellos, los 4 alumnos que utilizan un dibujo como ayuda). La figura 4.42 muestra diferentes soluciones de alumnos de este nivel. En los alumnos de 4.º la estrategia mayoritaria responde a un razonamiento aritmético a partir de sumas y restas. La tabla 4.8 muestra la distribución de las diferentes respuestas obtenidas para los dos cursos.

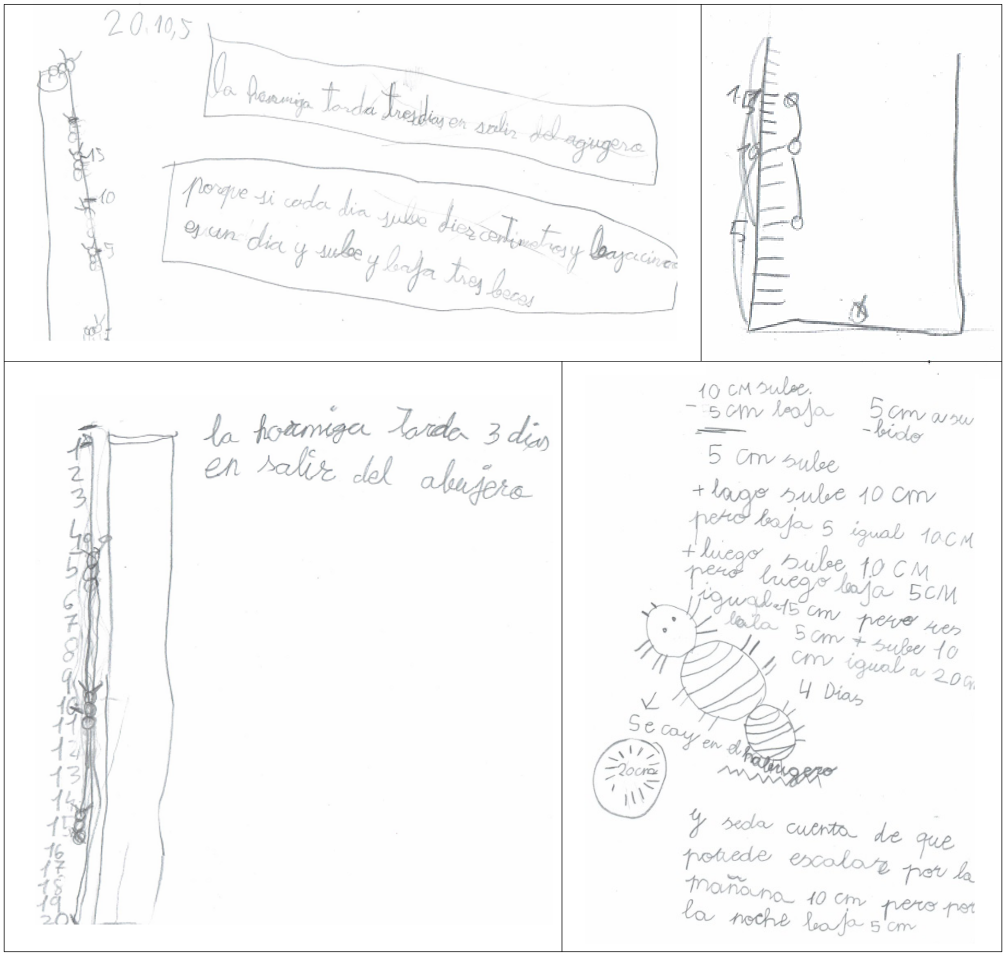


Figura 4.41: Ejemplos resueltos por alumnos de 2.º

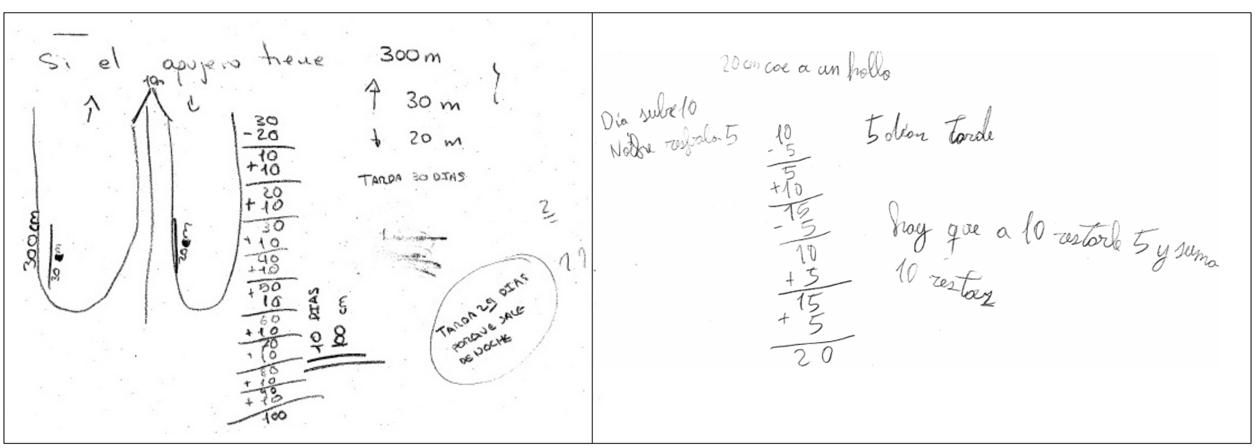


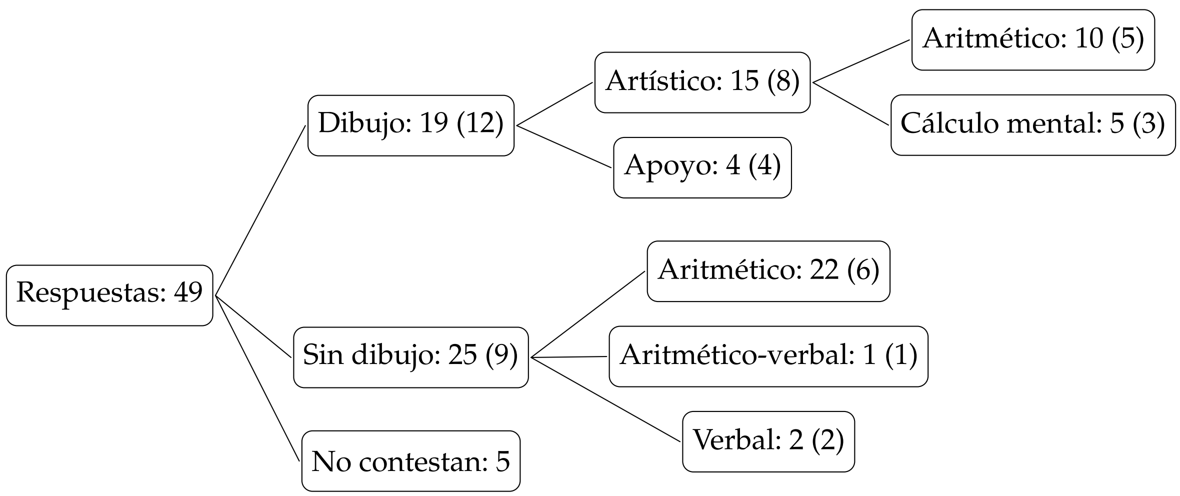
Figura 4.42: Ejemplos resueltos por alumnos de 4.º

Tabla 4.8: Resultados en 2.º y 4.º en el problema de la hormiga.

	Resultados de 4.º		**Resultados de 2.º**	
Respuesta	Alumnos	%	Alumnos	%
2 días	3	6,1%	3	7,5%
3 días	21	42,9%	25	62,5%
4 días	8	16,3%	5	12,5%
5 días	8	16,3%	1	2,5%
Otra	4	8,2%	0	0,0%
No contestan	5	10,2%	6	15,0%

Fuente: elaboración propia.

En el siguiente esquema resumimos las estrategias empleadas por los alumnos de 4.º (la cifra entre paréntesis corresponde a las respuestas correctas correspondientes):



Los alumnos no cuentan con el enunciado escrito, se lo hemos leído, y se ha pedido a los alumnos que en su hoja de trabajo narren la historia del problema de tal forma que su maestra a partir de estas hojas sea capaz de entender el enunciado y la solución a la que ellos llegan. Se ha pedido a las maestras que se ausenten de la sala mientras contamos el problema y ellos empiezan a trabajar en él. Nuestro objetivo es una vez más concienciar a los alumnos de la importancia de contar el problema con sus propias palabras, interpretar el enunciado, y explicar su procedimiento de resolución. Creemos que esto es lo que ha condicionado a los alumnos de cuarto curso a hacer un dibujo meramente ilustrativo, pues en general todos ellos creen tener una buena imagen mental del problema.

Leemos el enunciado hasta tres veces a petición de los alumnos. A partir de la segunda lectura, el impulso resolutor de algunos de ellos les ha llevado a tomar nota de los datos y comenzar a resolver el problema a nivel individual. De hecho, tanto en segundo como en cuarto ha habido niños que han dado de forma oral e inmediata su respuesta. En todas las aulas sin excepción han protestado por no disponer de los enunciados y han pedido a la investigadora que lo escribiera en la pizarra o bien lo proyectara. Los alumnos de segundo han trabajado en grupos de cuatro y los de cuarto en parejas.

A los alumnos de cuarto curso una vez resolvieron el enunciado inicial se les planteó un segundo enunciado:

Una rana cae en una charca de 300 cm de profundidad, durante el día la rana va subiendo por las paredes de la charca y es capaz de ascender 20 centímetros pero por la noche va resbalando y desciende 10 centímetros.

En el aula B el enunciado dice que asciende 30 centímetros y desciende 20 centímetros. En el aula C no hemos podido trabajar esta segunda variante pues por ajustes de programación se nos pide que la sesión no se extienda más allá de 40 minutos.

Contamos con 49 respuestas para la primera versión del problema y con 32 para las segundas versiones. Para este segundo enunciado solo 4 alumnos han dado con la respuesta correcta, una pareja en cada clase. Una de ellas ha calculado día a día hasta que al llegar al día 14 se da cuenta de que está a la mitad de altura, 150 cm, y decide multiplicar los días por dos. La otra ha comenzado en la altura de 300 cm el día 30, cuando ha subido 30×10, para luego comenzar a restar «pues si antes cuando llega a la salida ya había salido por el agujero pues ahora hacemos lo mismo». Y lo resuelve de viva voz haciendo cálculo mental cuando nos acercamos a preguntarles sobre qué están discutiendo. Hay 13 alumnos que han contestado que tarda 30 días porque cada día recorre 10 centímetros y 8 no llegan a contestar mientras que 7 obtienen respuestas sin sentido como 10, 12, 24 y hasta 35 días.

Las maestras contestaron en todos los casos que tardaría cuatro días en el primer caso y 30 en el segundo. Cuando les hemos preguntado que «30, ¿por qué 30?», solo una de ellas ha reflexionado y ha utilizado un argumento similar al de la pareja que parte de la situación de parada en 300 centímetros y cuenta hacia atrás.

En la resolución grupal han salido los alumnos a exponer sus soluciones al primer problema, pero para la segunda versión hemos recogido de viva voz las respuestas que daban y la investigadora ha corregido el problema directamente partiendo de la situación del día 26, cuando la rana termina a 260 cm de altura, y comprobando por tanto que tarda 29 días en salir en la opción del aula A y 28 días en la opción del aula B. No creemos haber alcanzado el objetivo de hacerles reflexionar sobre la forma de generalizar un problema pero sí creemos haberles mostrado que un buen dibujo ayuda a enfocar con más probabilidades de éxito el problema.

9. Análisis de la ficha 7

En la ficha 7 se han trabajado cuatro problemas diferentes, todos ellos son problemas publicados en la página de Nriching Mathematics (https://nrich.maths.org/) o variantes de ellos. El objetivo es iniciar a los alumnos en el trabajo sistemático y en la necesidad de pensar en cómo recopilar de una forma organizada los intentos de solución, pues las soluciones pueden no ser únicas. Los problemas se han trabajado en grupos de tres o cuatro alumnos en dos rondas diferentes. En la primera de ellas repartimos a cada equipo un problema distinto; cada equipo trabaja su problema e intenta buscar el conjunto de soluciones, para a continuación explicar el proceso de resolución a nivel individual en su hoja de trabajo. En la segunda ronda reconfiguramos los equipos de forma que nos aseguremos que hay dos «expertos», dos alumnos que ya han trabajado con anterioridad el problema o uno similar y se les asigna un nuevo problema. Solo hemos podido trabajar los problemas 1 y 2 en segunda ronda pues queríamos que todos los alumnos trabajaran todos los problemas y no hemos podido disponer de una tercera sesión para trabajar los problemas 3 y 4. En la segunda ronda no solo les pediremos que den con todo el conjunto de soluciones posibles sino que se aventuren a dar un proceso de generalización. Al terminar el trabajo pasamos a exponer las soluciones en la pizarra.

Los problemas 1 y 2 poseen enunciados similares, en ambos pedíamos a los alumnos que dieran todos los resultados posibles al final del primer tiempo de un partido conocido el resultado final del encuentro. En la segunda ronda el enunciado es equivalente pero se les pide que busquen una forma de dar respuesta a un resultado cualquiera sin llegar a generar todas las soluciones posibles. Les hemos ayudado con una serie de preguntas guiadas: ¿sabrías decirme cuántos resultados distintos se pueden dar para un resultado final cualquiera, por ejemplo, si el partido concluye 7 a 2, o 2 a 1, etc., sin tener que hacer en cada ocasión la tabla con todas las variantes?

En el problema 3 se sabe que tenemos una serie de 15 cartas numeradas del 1 al 15 y una serie de premisas o condiciones. El objetivo es dar con los 7 números que figuran en esas cartas sabiendo que cumplen todas las condiciones simultáneamente.

El problema número 4 nos pide buscar todas las formas posibles de hacer pulseras con 8 cuentas, 4 de un color y 4 de otro, y con la condición de que las pulseras sean simétricas.

Los alumnos se han encontrado con dos dificultades importantes, el trabajo con problemas abiertos y los errores de interpretación del enunciado, especialmente en el problema número 4, como veremos más adelante. A continuación analizamos cada uno de los problemas.

9.1. Ficha 7 – Problemas 1 y 2

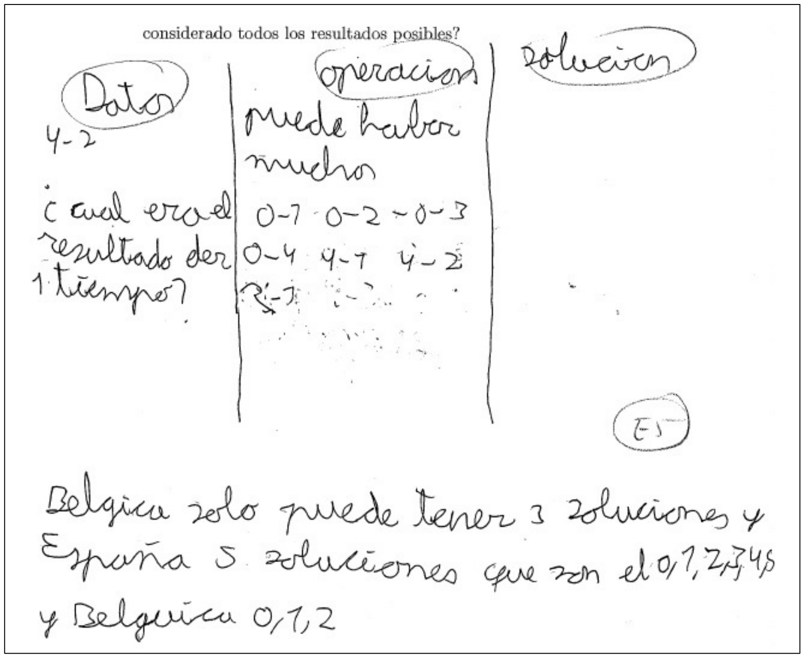
Problema 1[5]: En la final de hockey sobre hierba de los Juegos Olímpicos del 2000, Holanda jugó contra Corea, el resultado al final del tiempo reglamentario fue de empate a 3 goles y hubo que ir a los penaltis para decidir el campeón. ¿Podrías decir cuáles son los posibles resultados al finalizar el primer tiempo?, ¿cómo puedes estar seguro de que has considerado todos los resultados posibles?

Problema 2: En los cuarto de final de hockey sobre hierba masculino en los Juegos Olímpicos de 2008, España ganó a Bélgica por 4 a 2. ¿Podrías decir cuál era el resultado al finalizar el primer tiempo?, ¿puedes encontrar todos los resultados posibles?, ¿cómo puedes estar seguro de que has considerado todos los resultados posibles?

En la primera ronda, un total de 11 alumnos trabajan el problema 1 y 10 alumnos trabajan el problema 2. Excepto dos que se ausentan, todos ellos asumirán el papel de expertos en la segunda ronda. En todos los grupos que trabajaron este problema en la primera sesión creyeron no saber resolver el problema porque decían no conocer cómo es un partido de hockey: ¿cuántos tiempos tiene, cuántos jugadores hay y cómo se marca? Con una serie de preguntas se les hizo ver que la información que ellos demandaban no era relevante para abordar el problema; aun así, muchos de ellos terminaron tomando nota de «en un partido de hockey hay dos tiempos y se marcan goles».

En la primera ronda hemos observado que, salvo un grupo que no llega a aportar ninguna solución, el resto de los grupos emplearon más tiempo en llegar a un acuerdo sobre la forma de abordar el problema y recoger las soluciones que en la resolución en sí misma.

[5]Este problema puede encontrase en https://nrich.maths.org/7408.



considerado todos los resultados posibles?

Datos | operación | Solución

4-2

¿cual era el resultado der 1 tiempo?

puede haber muchos

0-1 0-2 0-3

0-4 4-1 4-2

ES

Belgica zolo puede tener 3 zoluciones y España 5 zoluciones que zon el 0,1,2,3,4,5 y Belguica 0,1,2

Figura 4.43: Ficha 7. Problema 2. Solución en la primera ronda.

En muchos grupos deciden organizarse por parejas para trabajar cada una por su lado y luego poner el trabajo en común. Todos los equipos, salvo el que hemos mencionado que no soluciona el problema, terminan elaborando una lista más o menos ordenada. Algunos, como el que se muestra en la figura 4.43, dan la pauta para hacer la lista. Todos los grupos consideran los resultados 0-0 y un resultado igual al marcador final como resultados posibles al término del primer tiempo, resultados que inicialmente no habían considerado. Ningún equipo se preocupa de responder a la segunda pregunta planteada en el enunciado.

En la segunda ronda se les pidió a los expertos que no asumieran el papel de resolutores, sino que participaran como uno más en el grupo, que aportaran su experiencia pero escuchando la opinión de sus compañeros. Todos los expertos aclaran las dudas sobre el enunciado y dicen saber cómo es un partido de hockey: «tiene dos tiempos y tenemos que buscar los resultados posibles en el descanso y como son muchos es mejor hacer una lista». Solo un grupo organiza los resultados en una tabla y varios de ellos lo hacen en matrices ordenadas. Contamos con el trabajo de 14 grupos, un total de 44 alumnos en esta segunda ronda. En la mayoría de los grupos participan dos expertos. Y los resultados son claramente mejores que en la primera ronda: se han calificado las soluciones de los alumnos con una puntuación de 0 a 4 puntos y mientras que en la primera ronda el total de puntos alcanzado entre todos los alumnos que trabajan estos dos problemas es de 48, en la segunda estos mismos alumnos alcanzan a obtener un total de 58 puntos sobre los 84 que representan el máximo de puntuación que podrían haber alcanzado.

En todos los trabajos de la segunda ronda se observa que ponen más cuidado en explicarse y algunos llegan a numerar las preguntas y sí se cuidan de responder a todas ellas. A medida que van terminando el problema se les pregunta si saben decirnos cuántos resultados serían posibles para tanteos diferentes al que plantea el enunciado, y cómo contestar sin llegar a hacer todos los resultados. 14 alumnos llegan a dar con el proceso de generalización tal y como se muestra en la figura 4.44. A la pregunta de ¿cómo puedes estar seguro de que has considerado todos los resultados posibles?, la mayoría de los alumnos responden estar seguros de que su respuesta es la correcta porque han escrito todos los resultados en orden, como hace el alumno 4A-12 en la figura 4.45. A medida que van terminando y van contestando que para el partido España-Bélgica hay 15 resultados posibles, la investigadora les hace lo que ellos dicen ser una «pregunta trampa»: «si para España hay 5 resultados posibles como decís, y para Bélgica hay 3, entonces ¿por qué no son 8 el total de resultados posibles, $5 + 3 = 8$, sino los 15 que os salen a vosotros?». Ningún grupo cuestiona el principio de autoridad y repasan sus soluciones convencidos de que se han equivocado, pero terminan llamando a la investigadora para decirle o bien que su solución está bien, pues la han repasado y están todos los posibles, o bien que no saben qué es lo que han hecho mal. En este momento les pedimos que escriban cómo han llegado a esta solución y por qué creen que es la correcta.

El problema ha funcionado muy bien con la salvedad de un par de grupos en el aula B que hemos tenido que cambiar o disolver a petición de la maestra pues su comportamiento no era el adecuado.

El papel de los expertos ha sido muy productivo, pues ha permitido conducir a buen puerto a todos los alumnos; se han dado una serie de comportamientos que ponen de manifiesto que la eficacia a la hora de resolver problemas está relacionada con la personalidad de los individuos, con la idiosincrasia del grupo y con la actitud de los maestros con respecto a la tarea. Analizamos cuatro situaciones que nos han llamado la atención y que están directamente relacionadas con la eficacia del aprendizaje entre iguales y la personalidad del alumno que ejerce como experto:

1. Buenos resolutores con carácter individualista. Tanto en el aula A como en la B hay algunos alumnos de este perfil, y en ambos casos han dado lugar a situaciones sin-

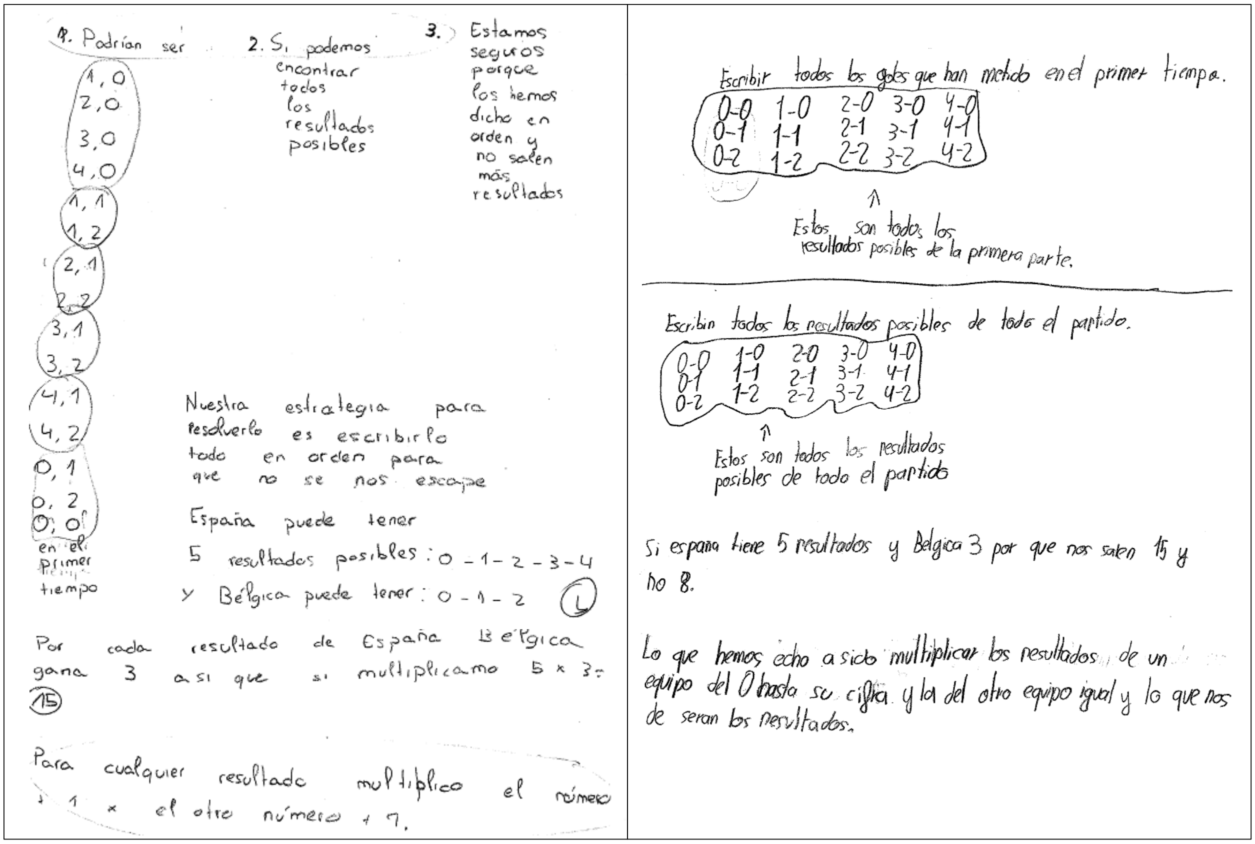
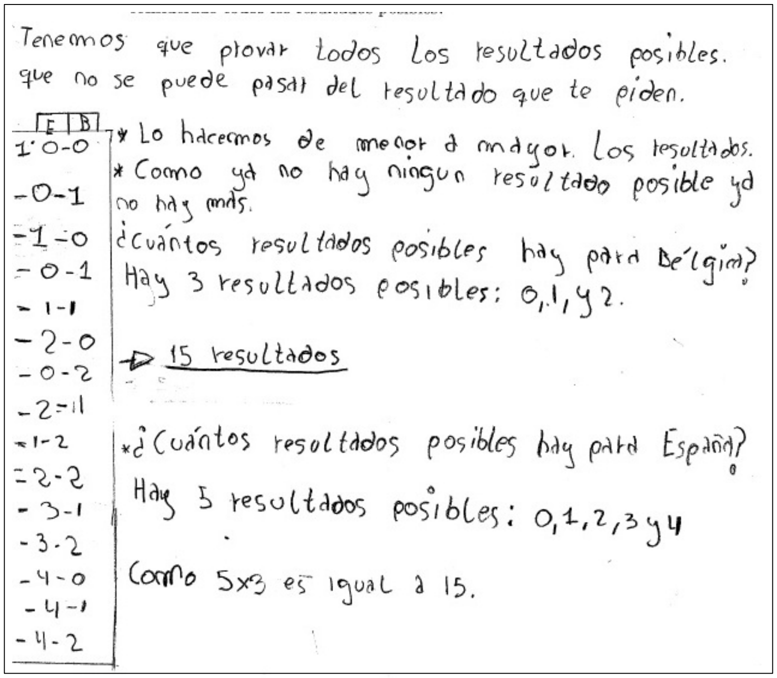


Figura 4.44: Ficha 7. Problema Hockey. Trabajo individual y colectivo para generalizar la solución.

gulares, especialmente en el aula B. La figura 4.46 muestra el trabajo de un alumno que presenta estas características, si bien es cierto que en la primera ronda trabaja de forma completamente independiente y es el único que concluye el problema, pero el resto de los miembros de su equipo también llegan a resolver correctamente solo que no llegan a formular una conclusión. En la segunda ronda este alumno decide que trabajarán por parejas, y elige su pareja, el miembro más callado y tímido del grupo; empieza a resolver el problema de forma completamente individual ignorando a su compañero. Cuando la investigadora decide anotar una llamada de atención en la hoja de trabajo, anotación que va precedida del aviso: «bueno voy a ponértelo por escrito, que ya veo que escuchar, no me escuchas», él decide tacharla y continúa. Reproduce la misma forma de trabajar que en la primera ronda. Su compañero se une a la otra pareja y son los primeros de su clase que dan con la generalización sobre el número total de soluciones posibles, a los tres se les ve entregados con alegría a la tarea. Cuando la investigadora les pide analizar los resultados para otros marcado-



Tenemos que provar todos los resultados posibles.
que no se puede pasar del resultado que te piden.

E | B
1·0-0
-0-1
-1-0
-0-1
-1-1
-2-0
-0-2
-2-1
-1-2
-2-2
-3-1
-3-2
-4-0
-4-1
-4-2

* Lo hacemos de menor a mayor los resultados.
* Como ya no hay ningun resultado posible ya no hay más.
¿Cuántos resultados posibles hay para Bélgica?
Hay 3 resultados posibles: 0, 1, y 2.
15 resultados
*¿Cuántos resultados posibles hay para España?
Hay 5 resultados posibles: 0,1,2,3 y 4
Como 5x3 es igual a 15.

Figura 4.45: Ficha 7. Problema Hockey. Los alumnos muestran su esquema de resolución.

res, este alumno protesta y dice en tono un poco más alto: «si ya lo hemos resuelto, para qué más preguntas». La maestra se acerca a la investigadora y le comenta que ya han resuelto el problema y lo han hecho bien, la investigadora le hace ver que está buscando la extensión del problema, la maestra no es consciente de que se puede generalizar la solución. Este alumno no llega a generalizar la respuesta, mientras que sus compañeros sí dan con la respuesta buscada, figura 4.44.

Con este alumno no creemos haber acertado en mejorar su resiliencia: cuando un problema le resulta complicado sencillamente lo deja.

2. Buenos resolutores que no están en la segunda ronda como expertos. Se nos ha dado esta situación en tres equipos pero solo ha sido conflictiva en uno de ellos, en el que el alumno ha tenido que compartir grupo con otro buen resolutor que actuaba como experto pero que no es reconocido por este alumno como tal. Esta situación se arrastra desde tercero y, aunque parece superada en ocasiones, cuando estos dos alumnos trabajan juntos se puede comprobar que no es así. La actitud de nuestro alumno ha sido tal que ha hecho llorar a dos de sus compañeros de grupo por no admitir sus propuestas, a pesar de que eran los dos expertos del grupo. Este alumno ha sido el único en no dar con el proceso de generalización pues sus compañeros, una

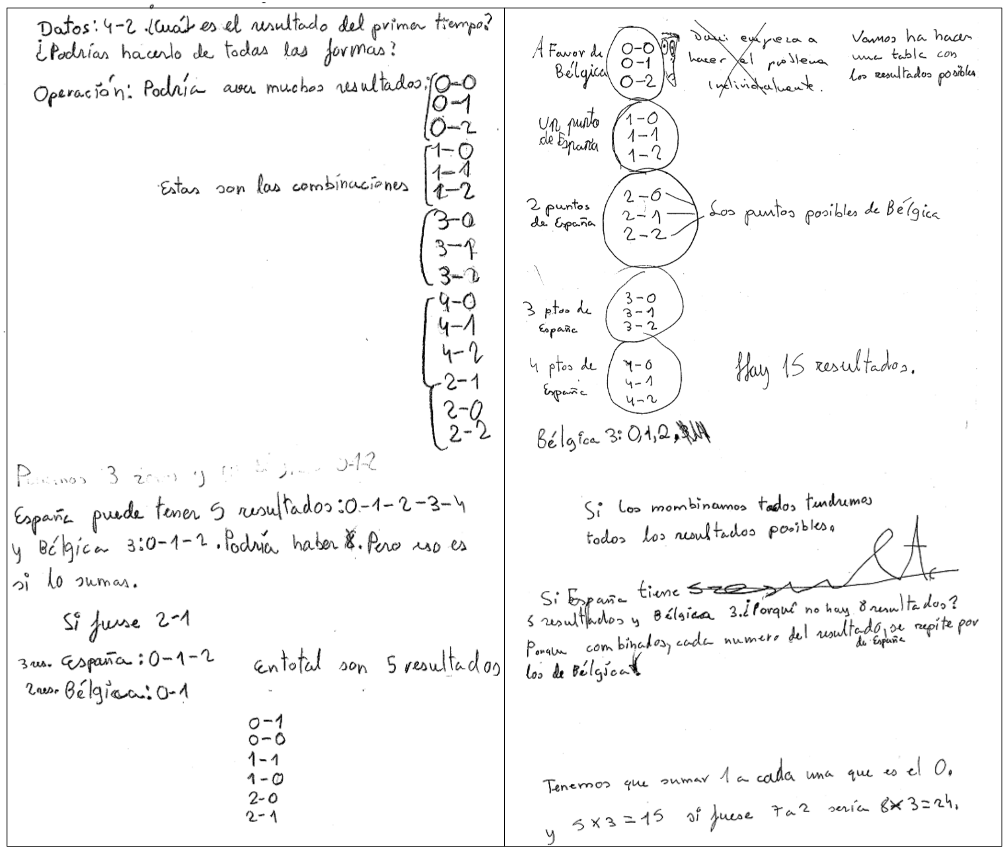


Figura 4.46: Ficha 7. Problema 2. Muestras del trabajo del alumno en primera y segunda ronda.

vez que se han tranquilizado, han optado por resolver el problema por su cuenta.

3. Alumno tímido con eficacia media a la hora de resolver problemas pero con mayor capacidad que sus compañeros de grupo. Antes de configurar este grupo se ha consultado con el alumno esta situación, que ha sido buscada, pues queríamos un grupo en el que pudiera actuar como líder y experto y así se lo hemos hecho saber: «tú sabes resolver el problema, ya lo has trabajado. Eres el experto y les ayudarás a resolver bien el problema». Ha intentado comentar sin éxito sus propuestas pero le ha vencido la timidez. Como el comportamiento de sus compañeros no es el adecuado, hemos optado por separarlo del grupo y ponerlo junto con otro alumno que estaba en una situación similar en su grupo de trabajo. El resultado final de estos dos alumnos es claramente mejor que el que mostraron en la primera ronda.

4. Alumnos con baja eficacia como resolutores y que actúan como expertos. Estos alum-

nos no han sabido aportar más ayuda que la inicial para analizar el enunciado y hacer una lista. Sus grupos han llegado a buen puerto con las preguntas guiadas de la investigadora. Esta labor de experto se nos antoja complicada para este tipo de alumnos.

9.2. Ficha 7 – Problema 3

Tengo 15 tarjetas numeradas del 1 al 15. Cojo sólo siete de estas tarjetas y las coloco en fila boca abajo (no puedo ver los números). Tienes que adivinar los números que hay en cada tarjeta teniendo en cuenta que:

- los números de las dos primeras tarjetas suman 15,
- los números de la segunda y tercera tarjeta suman 20,
- los números de la tercera y la cuarta suman 23,
- los números de la cuarta y la quinta tarjeta suman 16,
- los números de la quinta y la sexta suman 18,
- los números de la sexta y la séptima suman 21.

¿Hay otras soluciones diferentes para este problema?, ¿puedes encontrarlas?, ¿cómo puedes saber que has encontrado todas las soluciones posibles? [6]

Para dar con la solución de este problema es necesario ser muy organizado con los datos y considerar todas las posibles maneras de escribir las sumas que plantean las condiciones. Solo uno de los equipos de los tres que han trabajado este problema ha empezado con esta estrategia tal y como muestra la figura 4.47. Finalmente solo uno de ellos ha llegado a dar con una de las soluciones posibles por ensayo y error, figura 4.48.

El otro equipo no ha podido avanzar más allá de plantear algunas posibilidades y llegar a la conclusión de que las tarjetas dos y tres tenían números de dos dígitos.

En uno de los grupos les hemos visto superados por el problema, y hemos intentado que nos explicaran el punto en el que se quedaban bloqueados. Para ello, hemos empeza-

[6] Este problema puede encontrase en http://nrich.maths.org/7506.

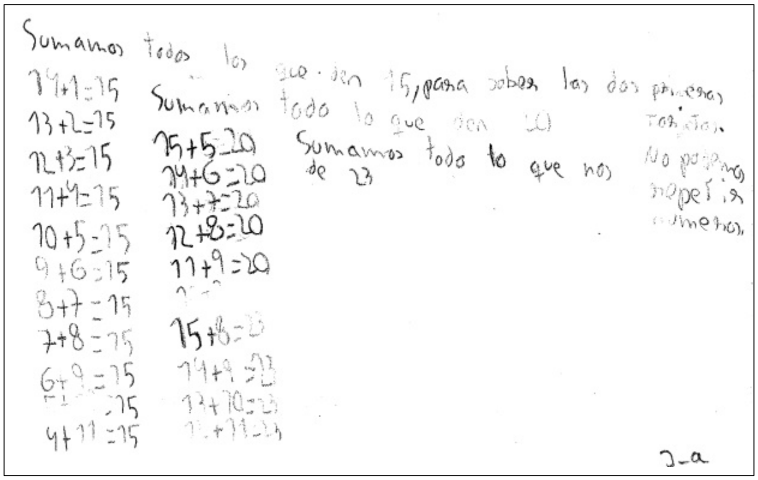


Figura 4.47: Ficha 7. Problema 3. Lista de sumandos que cumplen las condiciones del enunciado.

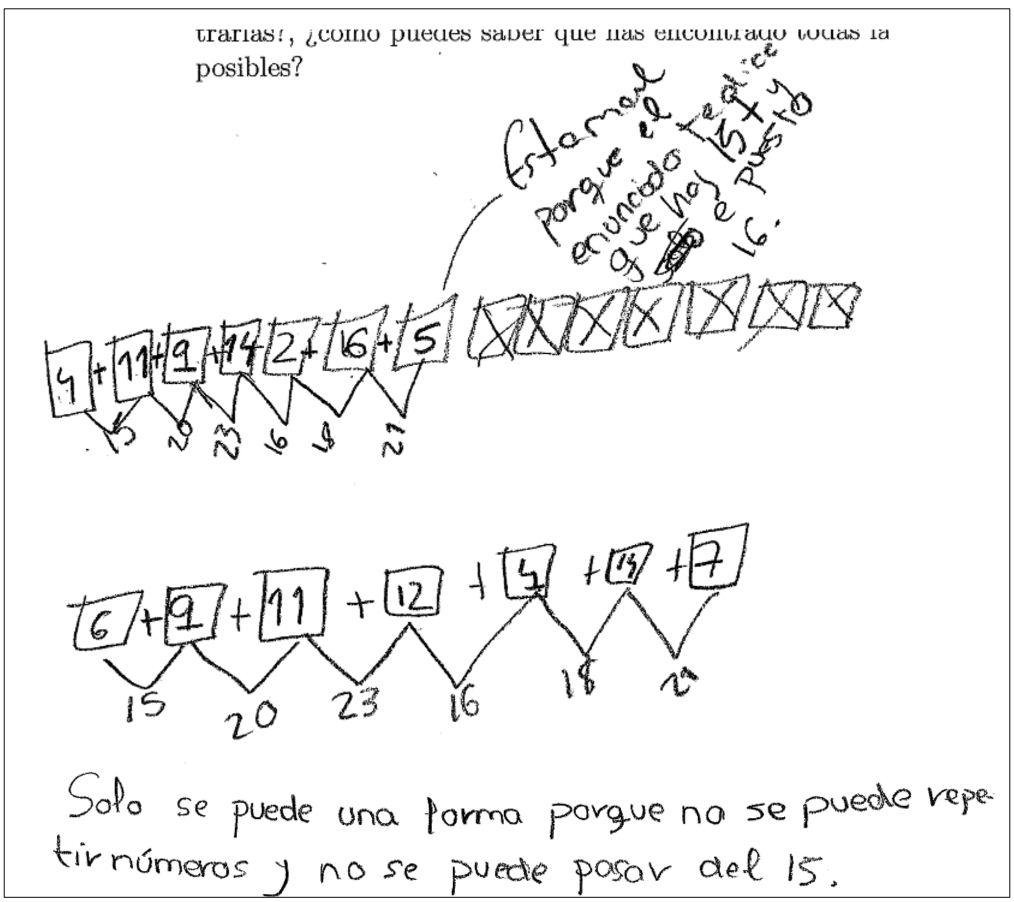


Figura 4.48: Ficha 7. Problema 3. Solución por ensayo y error.

do por leer el enunciado con ellos y asegurarnos de que lo comprendían correctamente. Después les hemos pedido que enunciaran en voz alta una estrategia y la probaran: como respuesta a nuestra sugerencia, han pensado en tomar dos números como 10 y 5 que cumplen la primera condición, les hemos hecho ver que hay muchos más como por ejemplo 9 y 6, 8 y 7, y en ese momento se han dado cuenta de que «¿hay que probarlos todos?». Deciden repartirse el trabajo, pero una de las parejas que es la que realmente comienza a probar otras alternativas no es sistemática y no llega a poder concluir en qué punto se ha quedado atascada. La otra pareja se siente superada y nos dice: «no sabemos cómo seguir, nosotros no podemos solucionar este problema». Les vemos tan abatidos que la investigadora decide sentarse con ellos a buscar una forma de organizar la información. Vamos configurando una tabla similar a la que mostramos a continuación, figura 4.49; no podemos mostrar la original pues el alumno que se sentía superado por la situación al concluir ha preguntado si se podía quedar con la hoja. Le decimos que sí pues será el encargado de salir a explicar a sus compañeros cómo abordar el problema en la próxima sesión.

9.3. Ficha 7 – Problema 4

> Ana y Marcos están haciendo pulseras para recaudar dinero para el viaje de fin de curso. Han decidido hacerlas de una forma muy matemática: cada pulsera tiene 8 cuentas, cuatro de un color y cuatro de otro color y cada una de ellas debe ser simétrica respecto al centro de la pulsera. ¿Cuántas pulseras diferentes pueden hacer?, ¿puedes describir cómo son todos los modelos?, ¿cómo te aseguras de que no hay ninguna más? Y si tuvieran 9 cuentas, cinco un color y cuatro de otro, ¿cuántas pulseras diferentes podrían hacer?[7]

Este problema no ha funcionado todo lo bien que esperábamos pues el enunciado se ha prestado a interpretaciones erróneas por parte de los alumnos que han buscado la simetría en configuraciones circulares, lo que dificulta considerablemente el problema. En el enunciado original se pide la configuración de todas las pulseras con solo cuatro cuentas de dos colores diferentes y se aporta una imagen que deja claro que se quiere trabajar simetrías lineales. Durante la sesión de clase la investigadora solo ha alcanzado a extrañarse pues algo parecía no estar funcionando correctamente, pero solo ha podido

[7] Este problema puede encontrase en http://nrich.maths.org/9692.

indicar a los alumnos que intentaran resolver el problema con rotuladores de colores o con fichas de parchís. Cuando al finalizar la sesión se han revisado las fichas es cuando se ha dado cuenta de los problemas de interpretación de los alumnos y de la necesidad de una ayuda en forma de imagen y de material manipulativo.

La estrategia de codificación es diferente en cada grupo, unos han optado por trabajar con dos colores diferentes, otros utilizan letras, y algunos otros números. Solo una pareja se ha dado cuenta de que a la hora de hacer los collares se pueden configurar por parejas. Han sabido llegar a esta conclusión trabajando físicamente con las fichas del parchís: si empiezas por roja-roja en la otra forma puede poner poner amarilla-amarilla. Pero aun así no han sido capaces de dar con las seis soluciones posibles y solo han llegado a construir cinco de ellas.

Todos los problemas de la hoja han resultado interesantes para los alumnos. No solo permiten trabajar las matemáticas, sino que al no ser problemas vinculados a la aritmética y con soluciones abiertas les permiten tener una visión más amplia del quehacer matemático. Los problemas permiten explicar a los alumnos qué significa el trabajo «sistemático y ordenado», y muestran su eficacia a la hora de buscar soluciones. Por otro lado los problemas son fácilmente escalables y generalizables.

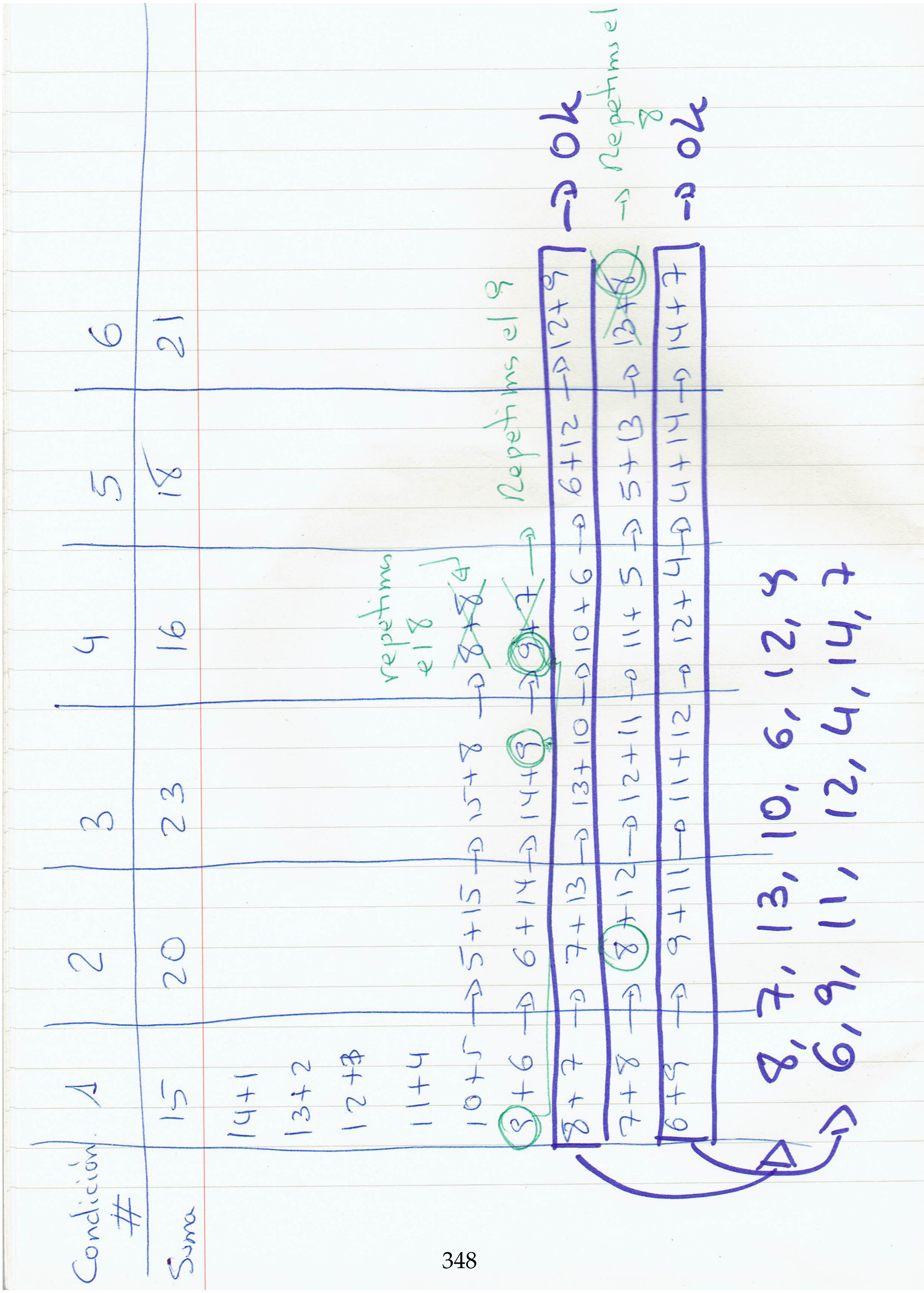


Figura 4.49: Ficha 7. Problema 3. Solución trabajada por la investigadora con los alumnos.

Capítulo 5

Discusión, conclusiones y prospectiva

1. Introducción

En esta memoria se recoge el trabajo de investigación centrado en la resolución de problemas matemáticos con alumnos de 3.º y 4.º curso de Educación Primaria. Esta investigación ha sido realizada dentro del campo de la Educación Matemática y describe el diseño y puesta en marcha de un taller de resolución de problemas dedicado a profundizar en el desarrollo de actitudes valiosas para la resolución de problemas matemáticos.

Al utilizar el término *actitudes*[1] estamos considerando una predisposición positiva o negativa que determina las intenciones personales e influye en el comportamiento; nos estamos refiriendo con ello a dos de los descriptores del dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas: las actitudes hacia las matemáticas, componente afectiva que se manifiesta en sentimientos de aceptación o rechazo de la materia, y las actitudes matemáticas, componente cognitiva que se refiere al modo de utilizar los conocimientos y capacidades

[1]*Actitud: Disposición de ánimo manifestada de algún modo.* Real Academia Española. (2014). Disquisición. En Diccionario de la lengua española (23.ª ed.). Recuperado de http://dle.rae.es/?id=0cWXkpX. En este trabajo hemos considerado la definición de Gómez-Chacon (2000, p. 23): «predisposición evaluativa de conducta que determina las intenciones personales e influye en el comportamiento»

generales (Gómez-Chacón, 2000; Callejo, 2010; NTCM, 2000). Estas actitudes podrán ser calificadas como *valiosas* en tanto en cuanto reflejen una forma de acercarse a la materia caracterizada por la confianza, la curiosidad, el deseo de explorar caminos alternativos, la perseverancia, etc.

En los capítulos precedentes hemos recogido no solo las propuestas de problemas, actividades y secuenciación que se han llevado a las aulas, sino también el relato de cómo los alumnos han reaccionado ante ellas, lo que entienden y lo que no alcanzan a comprender, las ideas que han surgido (acertadas o no) y su reacción ante las actividades. Es un relato desde la práctica docente tratado al estilo clásico de los círculos matemáticos: no planteamos un problema y lo tratamos de resolver sino que mostramos los problemas, ya sean de naturaleza matemática o pedagógica, y describimos lo ocurrido: las distintas estrategias que han surgido y cómo han funcionado. Llegado el momento de concluir este informe abordamos la discusión, conclusiones e implicaciones de la investigación, analizamos el diseño y puesta en marcha de la intervención, de las actitudes observadas y su evolución y concluimos con las cuestiones abiertas y las futuras líneas de trabajo que han surgido.

2. Discusión

2.1. Aspectos relacionados con la resolución de problemas

En el capítulo 1 de este informe nos hemos ocupado de definir y delimitar el marco teórico de la resolución de problemas en el ámbito académico atendiendo no solo a los aspectos matemáticos (qué es un problema y qué se entiende por resolución de problemas), sino también a los aspectos didácticos (cómo enseñar a resolver problemas), curriculares (el papel que juegan los problemas y la resolución de problemas en la enseñanza) y a los relacionados con el afecto y la enseñanza de las matemáticas (hemos considerado tanto aspectos psicológicos —el estudio del individuo que aborda el problema— como sociológicos —el contexto socio-cultural en el que se presenta el problema y condicionantes actitudinales por parte tanto de los maestros como de los alumnos implicados en la tarea—). Cada una de estas facetas encierra en sí misma todo un campo de conocimiento que se explicita al trabajar en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas de manera que implica estudiar y trabajar cada una de ellas independientemente de que el foco se centre en un subconjunto de estas. Por tanto, y a modo de síntesis, nuestros marcos teórico y metodológico quedan establecidos bajos los siguientes supuestos (son tres los pilares a analizar, la tarea planteada, el planteamiento de las sesiones y el afecto y las matemáticas):

1. Sobre la tarea planteada:

   La bibliografía analizada nos ha mostrado que el término «problema» y la expresión «resolución de problemas» son utilizados con una amplia diversidad de significados y estudiados desde varias perspectivas. En el contexto de esta investigación los problemas planteados[2] han supuesto en la mayor parte de los casos un reto intelectual para los alumnos, han implicado un cierto grado de deliberación y su solución no se ha mostrado como inmediata para el alumno, podemos calificarlos como no rutinarios. Hemos buscado «buenos problemas», pero los problemas trabajados en este estudio no lo son solo por cumplir con las condiciones que establecía Pólya (1965) y exponíamos en el capítulo 1 (p. 17) sino porque, tal y como hemos podido comprobar:

   - Son planteados y abordados como un proceso y no solo como unos resultados y han permitido diferentes estrategias de resolución por parte de los alumnos. Hemos podido comprobar que no es el problema en sí mismo lo que lo hace merecedor de este calificativo, sino la actitud de los alumnos frente a él y esta actitud en cierto modo hay que moldearla. Los alumnos guiados por la instrucción tradicional, tan pronto leen el enunciado, se lanzan a la tarea de calcular. Hay que frenar este «impulso ejecutor» y hemos comprobado que es posible hacerlo.
   - Son interesantes para el alumno. En línea con lo expuesto en el punto anterior, podemos afirmar sobre los problemas que utilizamos en este estudio que no es tanto el problema en sí mismo lo que motiva al alumno sino el contexto en el que tiene lugar el proceso de resolución. Estábamos convencidos, y lo hemos podido comprobar, que a los niños les gusta pensar y les gusta dar a conocer sus pensamientos y ser escuchados. Los problemas y la dinámica establecida

[2] Este es un estudio longitudinal de panel, en la terminología de Hernández, Fernández y Baptista (2006, p. 220); el mismo grupo de alumnos es analizado a lo largo de dos cursos académicos: 3.º y 4.º de Educación Primaria. La mayor parte de los problemas trabajados a lo largo de 3.º son problemas aritméticos escolares mientras que el espectro de las tareas planteadas en 4.º se ha ampliado para dar respuesta a la búsqueda sistemática de soluciones, problemas abiertos, generalización de resultados y presentación de estrategias heurísticas.

permiten al alumno comprender que es interesante explicar el proceso de resolución, que es «emocionante» dar con nuevas formas de solucionarlo distintas al planteamiento de una operación.

- El alumno ha experimentado qué significa resolver un problema: no basta con aplicar un algoritmo que permite obtener el resultado de forma directa. Resolver un problema es explicarlo, justificar por qué el procedimiento empleado funciona y en caso de no ser así preguntarse el porqué; buscar otras formas de resolverlo, si la respuesta obtenida no es coherente con la pregunta planteada encontrar la situación para la que la respuesta obtenida sea una solución plausible, etc. La tarea de resolver problemas se ha convertido en una actividad con un componente de exploración.
- Los errores, al tratar de corregirlos, se convierten en una fuente de conocimiento. En este estudio el error ha sido considerado no como ausencia de conocimiento sino como el resultado de aplicar aquello que se conoce y que en situaciones precedentes dio buenos resultados pero que no se generaliza de manera adecuada al nuevo contexto.

  Se ha desarrollado una cultura en el aula basada en desterrar el miedo a cometer errores, sin gomas de borrar y sin dejarse arrastrar por el impluso de obtener la respuesta correcta rápidamente.
- Los problemas trabajados han permitido el razonamiento matemático y la argumentación y exposición lógica de este razonamiento y como resultado de ello los alumnos «han hablado y escrito matemáticas».
- Los alumnos han descubierto que no existe una única manera de abordar los problemas y llegar a la solución. Contar con más de una propuesta de resolución es positivo y les ofrece la posibilidad de elegir, de escoger aquella que mejor se adapta a su entendimiento.

2. En cuanto a las sesiones de trabajo planteadas, han permitido cumplir con los propósitos para los que fueron definidas ya que:

   - La sesión se desarrolla en base a la discusión de las hipótesis planteadas por los alumnos, cómo las prueban y cómo las contrastan.
   - Se han evitado las «lecturas locales de los enunciados», la búsqueda de palabras clave y selección de la operación aritmética en función del significado que el alumno otorga a esa palabra clave.

- Se ha ampliado la base conceptual trabajada en clase. Los alumnos intentan dar respuesta a preguntas como «¿qué significa este número?», «¿por qué funciona este procedimiento?», «¿por qué aplicas esta operación?», «¿cómo podemos demostrar que esto funciona en otros casos?», «¿funciona en todos los casos?».
- La sesión de resolución de problemas es un espacio en el que los alumnos hablan, escuchan y actúan. El maestro escucha y plantea preguntas. Se permite que el alumno verbalize, que exponga su razonamiento. Esta es una de las acciones más valiosas de cara al cumplimiento de los objetivos de esta investigación.

3. Sobre el afecto y las matemáticas:

   Llegar a ser un buen resolutor de problemas es una cuestión de trabajo bien direccionado, actitud, tiempo y oportunidades. Ninguno de estos campos prevalece sobre los otros a la hora de conducir hacia el éxito ni existen procedimientos que lo garanticen. Hemos comprobado que el tiempo que se dedica a la resolución de un problema no puede preverse y que la inversión de energía y afectividad es importante

   En esta investigación hemos visto cómo algunos alumnos con un buen rendimiento académico, en base a los estándares evaluables establecidos por ley, no son los mejores resolutores cuando afrontan tareas matemáticas más complejas, como son las de generalizar o extender el problema planteado. En estas situaciones se ha mostrado eficaz el trabajo en grupo con una pauta de preguntas estudiada y planificada con antelación para conducir al grupo más allá del primer resultado ya obtenido. En algunas ocasiones hemos observado la predisposición de las maestras a dar por finalizada la actividad una vez obtenida una primera solución sin explorar la posibilidades de generalización o extensión que son las que aportan mayor contenido matemático a la resolución de problemas.

   También hemos observado de primera mano el efecto de la «ansiedad matemática» ya en los alumnos de tercero de Educación Primaria. Hemos comprobado que las «habilidades sociales» y el «autoconcepto» juegan un papel importante a la hora de abordar con éxito las tareas propuestas, de contribuir a la discusión pública y al trabajo en grupo.

   Los episodios de ansiedad se han reducido cuando hemos trabajado prestando atención a las reacciones afectivas, con paciencia y dándole la palabra al niño; sentándose a su lado cuando ha sido necesario.

Damasio (2005) nos indica que una «buena racionalidad» (racionalidad es equivalente a «procesos cognitivos», en nuestro contexto) no puede estar desconectada de las emociones, y una «buena racionalidad» es aquella que mejor conectada está con una base y sustrato emocional. Por lo tanto, partiendo del supuesto de que la resolución de problemas tiene anclajes cognitivos y emocionales y que el proceso de aprendizaje es un continuo que se sustenta en las bases que se establecen en las matemáticas escolares, hemos comprobado que prestar atención a las emociones se hace imprescindible de cara a fomentar el autoconcepto y la resiliencia del alumno al abordar las tareas matemáticas.

Los estudios realizados con alumnos de niveles educativos superiores, como el Bachillerato y los primeros años de Universidad, atribuyen la falta de destrezas de los alumnos para desarrollar pensamiento matemático avanzado no solo a un dominio más o menos escaso sobre los conceptos y los procedimientos sino también a la escasa atención que durante las etapas de formación previa se ha prestado a las reacciones afectivas.

Las actitudes observadas han sido de diversos tipos: hemos encontrado niños que decían y mostraban gusto para la materia pero siempre y cuando los problemas se le presentaran como resoluble mediante un procedimiento exacto, articulado, que él pudiera percibir como una secuencia bien estructurada que lleva siempre a un resultado numérico concreto. Otros niños parecían estar dispuestos a buscar métodos alternativos de resolución pero no mostraban interés por comprobar sus respuesta; una vez obtenido un resultado se mostraban impacientes por analizar otro procedimiento pero no estaban interesados en ver hasta qué punto sus soluciones o resultados podían ser generalizables o extensibles. Hemos encontrado tanto niños a los que les gusta resolver ejercicios rutinarios pero no abordar los problemas, como otros que muestran la actitud opuesta, y solo se interesan por las actividades cognitivamente más exigentes. Por eso la observación del comportamiento del alumno, los diálogos para obtener información sobre sus ideas y acciones, la forma en la que participan a lo largo de la sesión, contestan y plantean preguntas es vital para identificar y evaluar el desarrollo de estas actitudes positivas. De aquí que hayamos definido una matriz de evaluación o rúbrica que nos permita analizar la evolución del alumno y del grupo clase a medida que se han ido sucediendo los acontecimientos.

La observación constituye el modo más adecuado de evaluación y junto con el trabajo escrito de los alumnos y la forma de exponer sus resultados sirven de evidencia sobre la predisposición del alumno para perseverar en la tarea, comprobar métodos alternativos, comprobar sus soluciones, etc. Todo ello ha formado parte de los descriptores considerados en nuestra propuesta como se puede ver en el capítulo 3 (p. 167).

3. Conjetura y diseño de la propuesta de intervención

«—¿Cuál es el "problema" con la resolución de problemas?, ¿qué está sucediendo?»,

«—que no se trabajan». (Esta es la respuesta que obtuvimos de uno de los maestros que participaron en los test elaborados a partir de las preguntas liberadas de TIMSS 2011).

«—Esta respuesta, ¿no es un poco radical?, ¿taxativa?».

«—Bueno, más bien es que no sabemos trabajarlos o estamos trabajando problemas que no son problemas».

A partir de esta conversación nos planteamos las preguntas que nos ayudaron a formular nuestra conjetura de trabajo: ¿es posible formar a los alumnos de Educación Primaria en resolución de problemas?, ¿hay formas más propicias de trabajar la resolución de problemas que aquellas que mayoritariamente se están implementando en nuestras aulas?, ¿trabajar «problemas» y que estos sean variados, alejados de la aplicabilidad inmediata de los conceptos y algoritmos adquiridos ayudará en la labor de enseñar a resolver problemas? Si observamos los resultados que obtienen nuestros alumnos en el apartado de resolución de problemas a lo largo de las sucesivas etapas educativas, parece necesario revisar el tiempo que dedicamos a la resolución de problemas, las oportunidades (en número y calidad) que les estamos ofreciendo, y la forma en la que lo estamos haciendo. Concretando un poco más, para mejorar estas oportunidades creemos necesario hablar sobre cómo enseñar a resolver problemas. ¿Se puede enseñar a resolver problemas?, ¿se puede trabajar en el desarrollo de actitudes que contribuyan a la mejora de las capacidades de resolución de problemas de los alumnos?

A partir de la observación metódica realizada a lo largo de este tiempo sobre la forma de trabajar de los alumnos, de sus formas de comunicar los procesos seguidos y las actitudes hacia la tarea, hemos ido perfilando un modelo de trabajo para abordar la resolución de problemas en las aulas de primaria.

El modelo se ha ido concretando en ciclos de reflexión-interacción y ha estado guiado por la siguiente conjetura de investigación[3]:

> *Se puede diseñar, poner en práctica y analizar una secuencia de trabajo en la resolución de problemas que permite desarrollar una actitud positiva de los alumnos hacia las matemáticas y en particular hacia la tarea de resolver problemas al tiempo que se desarrollan actitudes matemáticas.*

Tener un conocimiento detallado sobre el currículo aprendido y en qué grado el aprendizaje es un aprendizaje relacional y transferible a la resolución de problemas nos ha permitido establecer un marco de referencia para diseñar el material de trabajo y la metodología de la intervención. El análisis de las respuestas de 111 alumnos de 4.º y 5.º curso de educación primaria a las preguntas liberadas de la prueba TIMSS 2011 nos proporciona una imagen detallada del grado de comprensión sobre el currículo estudiado, de la capacidad de los alumnos para acceder a estos conocimientos, seleccionarlos y utilizarlos adecuadamente en un contexto de resolución de problemas, así como de sus habilidades para argumentar las respuestas.

La herramienta diseñada para el estudio de los errores de los alumnos a partir del modelo de errores propuesto por Newmann (1977) facilita un conocimiento profundo sobre la lógica que subyace a estos obstáculos y con ello permite diseñar una intervención más efectiva. El modelo desarrollado articula de forma sencilla la secuencia de acciones que realiza un alumno al resolver un problema y asocia a cada una de ellas posibles fallos que son codificados como errores. Estos errores están directamente relacionados con las capacidades de comprensión lectora, la capacidad para entender el problema y transponerlo al lenguaje matemático, la capacidad para ejecutar correctamente el proceso matemático y de escribir de forma adecuada la solución (véanse las figuras 2.2 y 4.8, y la tabla 2.15).

La herramienta se ha mostrado adecuada para los alumnos de Educación Primaria y fácil de implementar por parte de las maestras.

El análisis de los resultados por dominios cognitivos y de contenidos nos muestra dos aspectos metodológicos importantes que no se han tenido en cuenta durante las etapas educativas precedentes, en concreto, al introducir conceptos y técnicas: por una parte, los alumnos no han pasado por etapas previas manipulativas y pictóricas que puedan

[3]conjetura: juicio que se forma como resultado de realizar observaciones o de analizar indicios; es una inferencia basada en pruebas incompletas no concluyentes

utilizar como recurso para resolver el problema; por otra, no se han trabajado ni planteado problemas para abordar los conceptos desde las diferentes representaciones y significados que habrían llevado al alumno a aprender comprensivamente.

> Los seres humanos han desarrollado tres sistemas paralelos para procesar la información y para representarla: uno, por medio de la manipulación y de la acción; otro, por medio de la organización perceptual y la imaginaria; y otro, por medio del aparato simbólico. (Bruner, 1966, p. 28).

A modo de ejemplo algunos de los campos conceptuales donde esta carencia se muestra especialmente es en el trabajo con fracciones, en los problemas de relaciones de proporcionalidad (los niños no diferencian con éxito las estructuras multiplicativas de las aditivas) y en la comprensión en general de las operaciones aritméticas.

El trabajo inicial con las preguntas de TIMSS 2011 puso de manifiesto que la mayoría de los alumnos es capaz de resolver una cuestión como «¿cuántos caramelos se puede dar a cada niño si se reparten 72 caramelos entre 5 niños?» pero no saben contestar correctamente el problema «¿a cuántos niños se le pueden dar caramelos si tenemos 72 caramelos y queremos dar 5 caramelos a cada uno de ellos?». Los problemas diseñados para trabajar a partir de este obstáculo en las aulas de las aulas de 3.º y 4.º corroboraron que en lo que respecta a la comprensión de las operaciones en las sesiones ordinarias de clase no se trabajan las distintas situaciones que le dan sentido a los diferentes significados de cada una de ellas.

El «caso de la división» es particularmente llamativo: los alumnos son conscientes de que un problema de «repartos equitativos» se resuelve mediante una división, pero no se les había planteado con anterioridad a esta intervención problemas de agrupamiento o de «contenido». El modelo de «reparto» o «partición equitativa» exige un número natural como divisor pues no tiene sentido hacer una cantidad no entera de partes iguales. El modelo de «agrupamiento» o «contenido», en cambio, si admite divisores no enteros. Problemas como «¿cuántas monedas de 50 céntimos me darán al cambiar una moneda de 2 euros?» o «¿cuántas raciones de media galleta puedo obtener a partir de 8 galletas?» tienen por objetivo trabajar este tipo de situaciones. Hay otro aspecto más a considerar en el tratamiento de la división euclídea, que no es una operación dentro del conjunto de los números naturales, ya que el resultado de operar dos números no da como resultado otro número natural, sino dos: el cociente y el resto. Tal y como hemos comprobado, el alumno necesita trabajar problemas que pongan de manifiesto cuál es el papel y la naturaleza de estos dos términos, producto de una división euclídea.

Ya hemos comentado que para este estudio los errores son interpretados no como falta de conocimiento, sino como conocimientos para los no se ha comprendido el campo de aplicación y sus posibilidades de extensión. Este es el caso de los alumnos que disponen la suma de dos fracciones en columna y suman numeradores y denominadores como términos independientes, o el de los alumnos que para encontrar la fracción que no es equivalente dentro de un conjunto de fracciones buscan patrones y analizan de forma independiente numeradores y denominadores. En el caso de las fracciones nos hemos encontrado también con alumnos que recurren a un dibujo para representarlas pero al igual que les sucede con otros problemas no saben como hacer un «buen dibujo»; en estos casos en concreto no han conservado variables (el tamaño de la unidad) y no saben interpretar sus propias producciones. Al introducir las fracciones en el aula no se presentan diferentes interpretaciones del símbolo «a/b» y el alumno no tiene la oportunidad de resolver problemas en las que estas interpretaciones se pongan de manifiesto ni de exponer verbalmente el trabajo que en ese momento está haciendo.

Otros de los puntos que se han trabajado es la búsqueda sistemática de diferentes razonamientos o estrategias y el desarrollo de herramientas de cálculo flexible. Por ejemplo en problemas como «3 libros cuestan 48 euros. ¿Cuánto cuestan 12 libros?» los alumnos piensan en obtener el precio unitario y multiplicar después por el número de libros a comprar pero muy pocos son los que han considerado que 12 libros es 4 veces más que 3 libros o han desarrollado estrategias informales de cálculo: por ejemplo, ninguno de los alumnos que ha llegado a calcular el precio unitario de un cuaderno ha tenido en cuenta que « $12 = 10 + 2$ y el precio de los 12 libros puede obtenerse a partir del precio de 10 más el precio de 2, dos veces el precio de un libro». Esta estrategia de cálculo les habría facilitado la multiplicación final.

Las sesiones destinadas al desarrollo de estrategias de cálculo y el cálculo mental nos han mostrado un menor número de errores de cálculo cuando el alumno aborda las operaciones a partir de estrategias propias, inventadas. Esto no solo mejora la motivación sino que permite además desarrollar el sentido numérico y las habilidades de estimación. En algunas ocasiones las estrategias de cálculo flexible se han mostrado más eficientes que las tradicionales. Por último, inventarse, desarrollar algoritmos, hace sentir al alumno que «está haciendo matemáticas».

Para que estas habilidades puedan ser aplicadas a la resolución de problemas hemos planteado tareas con números cuyo orden de magnitud no supone un grado adicional de dificultad; los números involucrados en el problema deberían ser tales que permitan al alumno representarse adecuadamente la situación o, al menos, simplificarla de tal manera que se pueda «resolver un problema más sencillo» para entender el proceso.

Creemos que la relación entre las habilidades de cálculo de un alumno, su sentido numérico y el éxito en la resolución de problemas no está suficientemente explicada y es una de las líneas de investigación que quedan abiertas para el futuro.

A lo largo de esta intervención hemos podido comprobar que los alumnos, bien por imitación, bien gracias al hábito, han abandonando el «impulso ejecutor» y han adquiriendo competencias verbales que les han ayudado a explicar y tomar conciencia de sus procesos de resolución. Además, han ganado en flexibilidad a la hora de buscar estrategias de resolución. Los alumnos más tímidos, o que han mostrado quedarse en un estadio menor de desarrollo, se han iniciado en la estimación de la solución, aunque son pocos los que han incorporado el hábito de comprobar los resultados obtenidos. El maestro debería hacer en clase exactamente aquello que está demandando a sus alumnos: pensar en voz alta mientras resuelve el problema, tomar distancia con el texto y verbalizar el proceso de comprensión y diseño de la estrategia, estimar el resultado, plantear un buen dibujo y revisar tanto el resultado como el proceso antes de dar por concluido el problema, pues de esta forma está brindando a los alumnos la oportunidad de aprender a partir del ejemplo. Es por ello que, durante esta intervención, la investigadora ha desarrollado en el aula un modelo de interacción que se espera que las maestras apliquen en sus clases.

Otras de las variables considerada en este estudio han sido los tipos de problemas planteados y las heurísticas trabajadas.

Los problemas trabajados han sido variados tanto en el grado de dificultad como en tipología. Esto ha permitido el trabajo de diferentes heurísticas de resolución, el desarrollo de estrategias de pensamiento, así como alcanzar un pequeño grado de generalización. Todo ello se ha mostrado como muy positivo pues los alumnos se han entregado a la tarea de resolución. Les ha resultado especialmente complicado plantear de manera autónoma el modelo de barras pero han sabido seguir los que le mostraba la investigadora e interpretarlos correctamente.

Hemos observado que para los alumnos es difícil aprender a resolver un problema usando una estrategia concreta, por ejemplo, haciendo un buen dibujo, recoger los datos o la secuencia en una tabla, hacer un esquema, o seleccionar material concreto para representar el problema, porque no han tenido la oportunidad de aprender a hacerlo ni han tenido la oportunidad de iniciarse en la resolución de problemas a partir de material concreto. Por este motivo a medida que la investigación ha ido avanzando hemos ido proporcionando problemas que en un primer momento están dirigidos a enseñar la técnica, por ejemplo hacer un buen dibujo (un buen dibujo es aquel que muestra la información y el proceso relevante en el problema), recoger los datos del problema en una tabla, trabajar sistemáticamente, etc. Finalmente, con la práctica se deja que el alumno adquiera destreza sin necesidad de indicarle expresamente qué técnica concreta utilizar para cada uno de los problemas. Podría decirse que estamos considerando en paralelo dos fases: aprender la técnica (cómo) y aprender a aplicarla (cuándo).

De las experiencias analizadas en esta investigación podemos concluir que el trabajo en resolución de problemas no debería limitarse a acciones ocasionales, sino que debería estar integrado en la programación de matemáticas. Si se desea o se considera más efectivo, se podría programar una sesión semanal en la que se trabajaría la resolución de un problema concreto dando tiempo a que sea analizado desde diferentes perspectivas, que sean los propios alumnos los que tomen la palabra, que las soluciones encontradas, erróneas o correctas sean debatidas, y que se propongan variantes y generalizaciones del problema trabajado.

Sería aconsejable la formación de los docentes en técnicas de resolución de problemas, en aprender a plantear y modificar problemas. Pautas como «leer el problema de nuevo», «piensa, piensa un poco más, usa tu cabeza» resultan de poca ayuda para el alumno. El alumno necesita una ayuda real por parte de su maestro; creemos que en primaria son pocos los alumnos que podrán convertirse en buenos resolutores de problemas sin esta ayuda.

Para concluir y a modo de pautas para el maestro resumimos las acciones que hemos encontrado como significativamente positivas a lo largo de esta intervención:

1. Es positivo trabajar problemas variados que no estén directamente relacionados con los contenidos que se están trabajando en un instante concreto. Mientras que la repetición de actividades de escasa demanda cognitiva se presenta como contraproducente, el trabajo con problemas es necesario para desarrollar la habilidad como resolutor.

2. La habilidad como resolutor no se adquiere en un instante determinado, es una habilidad que se desarrolla lentamente a lo largo del tiempo.

3. Para la mayor parte de los alumnos, y como fruto de la enseñanza habitual a la que están expuestos en el día a día, la resolución de problemas debe ser objeto de enseñanza y debe estar planificada.

4. Los alumnos deben captar la importancia de la resolución de problemas a través de lo que perciben de sus maestros. El interés que muestre su maestro en la resolución de problemas debería convencer a los alumnos de la importancia de aprender a resolver problemas.

5. Se debe trabajar la resolución de problemas con los maestros, es necesaria una formación continuada sobre este tema que les aporte herramientas y habilidades para seleccionar, trabajar distintas formas de solucionar un mismo problema, plantear generalizaciones, proponer alternativas a la primera solución encontrada, etc.

6. Los programas o iniciativas para mejorar la resolución de problemas han de estar adecuadamente planificados:

   a) El contenido ha de ser apropiado y debe responder a la metodología concreta (se trata de una tarea transversal planificada y trabajada a lo largo de todo el periodo escolar).

   b) Se han de establecer las líneas de actuación con una guía que vaya más allá de las características personales de quien está al frente del aula en cada momento.

   c) Ha de haber un tiempo concreto para trabajar los problemas. Las sesiones de resolución de problemas deberían de planificarse atendiendo a las siguientes pautas:

      1) Trabajar a nivel grupal la lectura del enunciado, analizar el vocabulario, la comprensión del texto.

      2) Verbalizar a nivel grupal las acciones a realizar. Se trata de una tormenta de ideas en la que hay que analizar las propuestas (ser flexibles, estimular la creatividad).

      3) Estimar la solución en todos los casos.

      4) Trabajar a nivel individual el problema. Dependiendo del tipo de problema, también se puede trabajar en parejas o en grupos reducidos (tres o cuatro alumnos). Hacerles preguntas sobre su trabajo a medida que van avanzando en la tarea para ayudar a los alumnos a ser conscientes de sus procesos cognitivos. Plantearles preguntas que puedan ayudarles con sus

dificultades, darles pistas y evitar que se frustren, pero sin acostumbrarles a que el maestro proporciona la solución.

5) Discutir a nivel grupal la solución del problema. Analizar siempre que sea posible dos o tres formas diferentes de abordar el problema. Ayudar a los alumnos a discernir cuándo una técnica es más efectiva que la otra, cuándo es apropiada y cuándo no.
6) Comprobar que las soluciones obtenidas son coherentes, que la estimación inicial era acertada o no y si se da esto último por qué. Revisar todo el proceso desde la solución obtenida.
7) Llevar propuestas o variantes del problema para los alumnos que concluyen su trabajo antes que los demás y para aquellos que necesitan apoyo si el problema les conduce a situaciones de bloqueo y abandono.

4. Conclusiones sobre la metodología. Fortalezas y debilidades

El contexto en el que ha tenido lugar este estudio y el reconocimiento de la complejidad intrínseca de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como la necesidad de observar y comprender la influencia de las investigaciones en la práctica del aula, nos han llevado a estudiar y analizar las características de la investigación de diseño y más concretamente de los «experimentos de enseñanza dirigidos por una conjetura» siguiendo a Confrey y Lachance (2000), pues en estos experimentos es el investigador el que actúa como docente.

En el caso concreto de esta intervención recae sobre la investigadora la responsabilidad de diseñar las tareas y su secuenciación, de documentar los recursos y conocimientos que manifiestan los alumnos durante la resolución de estas tareas, las interacciones entre pares, la evolución de las concepciones y, en general, cómo se aborda la enseñanza a lo largo de la experiencia.

Hemos podido constatar que la «investigación de diseño guiado por una conjetura» es un marco adecuado para el trabajo realizado pues permite reducir la distancia entre la práctica educativa y las propuestas teóricas, y proporciona un alto grado de flexibilidad para adecuarse a la realidad del aula en la que tiene lugar la intervención. La conjetura es contrastada y reformulada continuamente en un ciclo de reflexión-interacción. Las conjeturas iniciales de la investigadora guían el desarrollo del plan inicial. Cuando son trasladadas al aula, fruto de su interacción con los alumnos se recoge información que las respalda o da lugar a nuevas conjeturas. Como conclusión del proceso se genera conocimiento empírico que resulta útil en la toma de decisiones para la programación docente de las maestras del aula.

La investigación de diseño, afirman Cobb, Confrey, DiSessa, Lehrer, y Schauble (2003), pretende explicar por qué funcionan los diseños y sugerir cómo pueden adaptarse a nuevas circunstancias. En este informe hemos explicado cómo y por qué funciona la propuesta en un contexto real, no nos hemos limitado a documentar su éxito o su fracaso.

Como consecuencia del carácter cíclico de esta metodología se genera una gran cantidad de datos y se hace imprescindible un doble análisis de los mismos:

- uno local, sobre el material recogido sesión tras sesión: de este análisis saldrán las acciones y actividades para la sesión siguiente. Además, este análisis puede contribuir a la elaboración de teorías localizadas sobre la forma de trabajar un contenido concreto (por ejemplo la comprensión de la operación división, los razonamientos aditivos frente a los multiplicativos, etc.),

- otro global, de carácter retrospectivo, sobre el conjunto de los datos y con el propósito de encontrar modelos explicativos del desarrollo del conocimiento matemático de los alumnos. Gracias a este segundo tipo de análisis somos conscientes de la evolución y cambios en la actitud y actitudes matemáticas de los alumnos.

En el caso particular de este estudio el tamaño de las muestras consideradas, el número de sesiones y la extensión en el tiempo del experimento han generado una cantidad considerable de datos. Al tratarse de una sola investigadora las dificultades para analizar todos estos datos bajo diferentes perspectivas han sido relevantes. De aquí que, siguiendo la línea de autores como Steffe y Thompson, (2000), y Molina et al. (2011), se destaque la necesidad de contar con un equipo de intervención constituido por dos o más investigadores y un buen equipo de grabación de audio y sonido. De esta forma, la continua revisión de las observaciones y las conclusiones desde diferentes ángulos enriquecerán el desarrollo general del trabajo y garantizarán su calidad. Sin embargo, no se ha de perder de vista que un mayor número de adultos en el aula puede también entorpecer la espontaneidad y participación de los alumnos.

La coordinación entre los docentes del aula y el equipo de investigadores es imprescindible; al tratarse de estudios que se prolongan en el tiempo y se planifican a lo largo de varias sesiones, se hace ineludible el análisis del currículo y de la metodología entre sesión y sesión para detectar posibles influencias sobre la investigación y delimitar el origen del conocimiento de los alumnos. El doble carácter de la intervención del investigador en el aula (actúa como docente y como observador) también ha de ser analizado para determinar con claridad el origen del conocimiento adquirido y controlar que el investigador se limite a los objetivos de la sesión y la conjetura a analizar. Una vez adquirido el papel de docente es especialmente difícil substraerse al deseo de intervenir más allá del foco o focos de la investigación.

5. Limitaciones de la investigación

En este apartado analizamos los tres puntos que hemos identificado como limitaciones en este trabajo: las relativas al grupo de alumnos, las relativas a la recogida de datos (y con ellas las relativas a la presencia de adultos en el aula) y, por último, el amplio espectro de conceptos abordados.

Los resultados expuestos se refieren a los grupos de alumnos con los que se ha trabajado a lo largo de dos años. Estos alumnos han sido elegidos de forma incidental y en base al ofrecimiento, disponibilidad y facilidades dadas por el equipo directivo del centro; no son representativos de todos los alumnos de tercero y cuarto de educación primaria pero si pueden ser considerados una clase «estándar».

La investigación se basa en el análisis de su comportamiento, las producciones de los alumnos y las entrevistas en el contexto del aula. La información obtenida es limitada en cuanto a la capacidad de expresión verbal y escrita de los alumnos, en particular a lo largo del primer año de la experiencia: los alumnos no están acostumbrados a explicar sus pensamientos ni a tomar conciencia de sus procesos.

Durante el transcurso de las sesiones se iba tomando nota del discurso de los alumnos; esto se hacía en el momento en que tenía lugar la intervención del alumno, a medida que ellos iban trabajando en el problema o durante la puesta en común. Las preguntas y dudas han sido atendidas a demanda por la investigadora por lo que en ocasiones la recogida de información fue inmediata pero en otras había transcurrido un tiempo antes de que algunos alumnos pudieran ser escuchados si la investigadora estaba atendiendo a otros alumnos (tiempo que ellos han aprovechado en ocasiones para seguir discutiendo con los compañeros y a veces para cambiar de opinión, de estrategia o para perder el hilo de su argumento, circunstacias que no se han podido recoger). Esto implica que este tipo de investigaciones pueden mejorar si se dispone de formas de recogidas de datos más eficaces y apunta a la conveniencia de que sea un equipo de investigadores el que se haga cargo de las sesiones. Además, esto permitiría ampliar la muestra de entrevistas que pueden ser registradas. La entrevista en el aula es «natural», forma parte del diálogo maestro-alumno; considerar la presencia de equipos de grabación (humanos y materiales) es a la vez una restricción y una solución que hay que valorar.

En un estudio de estas características sería deseable un currículo aplicado alineado: los alumnos no deberían percibir diferentes formas de abordar los problemas, el taller responde a una metodología que ha resultado ser más motivadora y enriquecedora que las sesiones «ordinarias» de clase. La investigadora ha estudiado y analizado el currículo entre sesiones y ha planteado problemas que daban respuesta a las inquietudes y necesidades de las maestras del aula, aunque no ha sido posible unificar la forma de trabajo de estas sesiones y las clases gestionadas por las maestras. La intervención ha servido como formación para las maestras del aula, formación que ha de ser completada tanto en contenidos conceptuales como metodológicos.

El estudio abarca un amplio espectro de conceptos y es perfectamente fragmentable en propuestas que aborden la resolución de problemas variados a partir de una heurística concreta o bien en dominos y subdominios concretos.

Para favorecer la validez de la información recogida y minimizar la influencia de estas limitaciones se han combinados actividades individuales, en parejas y en pequeño grupo. Se ha tratado la corrección y análisis de los obstáculos a nivel individual y a modo de asamblea. Se ha permitido a los alumnos que tras el trabajo en grupo acordaran reflejar en su hoja de soluciones la respuesta y la metodología consensuada en grupo o aquella que se ajustase mejor a sus características personales y forma de comprender y explicar el problema. Mientras todo esto tenía lugar se ha tomado nota de la actitud del alumno y de las reacciones del grupo. En aquello casos en los que la intervención de la investigadora ha influido en la forma de abordar el problema o plantear las cuestiones esto se ha detallado a lo largo del informe.

6. Prospectiva

A lo largo del informe y del capítulo de conclusiones hemos ido desgranando algunas cuestiones de interés sobre las que desarrollaremos nuestra investigación futura:

¿De qué modo puede ayudarnos la herramienta de detección y clasificación de errores a analizar los procesos metacognitivos de los alumnos? Se ha hecho una prueba piloto con alumnos de sexto curso a los que se ha formado en la herramienta para ayudarles a identificar la naturaleza de sus bloqueos y se ha mostrado útil aunque en una fase previa parece aconsejable formar primero a los maestros en su uso.

¿Podemos diseñar y validar un test de actitud ante la resolución de problemas matemáticos para niños de tercero a sexto de Educación Primaria que nos indique cómo evolucionan las argumentaciones de los alumnos conforme van desarrollando destrezas en la resolución de problemas? Partiendo del test PSI de Heppner y Petersen (1982) diseñamos un cuestionario que en una fase piloto fue aplicado a los alumnos de cuarto curso de esta investigación y a alumnos de sexto curso. El análisis de factores nos permitió identificar tres constructos en los alumnos de sexto (confianza en la resolución de problemas, estilos de aproximación y control personal), pero no permitió identificar claramente ninguno de estos en los alumnos de cuarto de primaria lo que nos hace pensar en una revisión profunda del cuestionario y la necesidad de un trabajo previo sobre metacognición.

¿Puede diseñarse un plan de actuación sobre el currículo de tercero y cuarto de Educación Primaria que permita transformar las sesiones de clase en espacios participativos centrados en escuchar al alumno?

¿Puede diseñarse un taller de resolución de problemas para maestros que facilite el cambio de enfoque sobre las clases de matemáticas, su forma de crear y concebir problemas y su percepción sobre la capacidad de los alumnos para resolver y generalizar las cuestiones planteadas?

¿En qué medida las habilidades en cálculo facilitan la capacidad de resolución de problemas del alumno?

La búsqueda de respuestas nos lleva en primer lugar a diseñar un plan de intervención en resolución de problemas en el que se concreten las áreas de actuación. En paralelo al trabajo en las aulas, se trabaja la formación de los docentes en técnicas de identificación de errores, en el uso de herramientas de resolución y, en particular, en el modelado mediante herramientas gráficas como el modelo de barras para la resolución de problemas aritméticos. Este modelo no introducido hasta el momento en nuestro sistema educativo se está mostrando eficaz para la etapa de primaria y primeros cursos de secundaria en países como Singapur, Finlandia y Canadá, entre otros. El modelo une a su versatilidad la potencialidad para iniciarse en el lenguaje prealgebraico y facilitar así el tránsito de nuestros alumnos a los primeros cursos de educación secundaria.

Referencias bibliográficas

Alonso, V., González A. y Sáenz, O. (1988). Estrategias operativas en la resolución de problemas matemáticos en el ciclo medio de la EGB. *Enseñanza de las Ciencias, 6*(3), 251-264.

Arteaga, B. y García, M. (2008). La formación de competencias docentes para incorporar estrategias adaptativas en el aula. *Revista Complutense de Educación, 19*(2), 253-274.

Atkinson, P. H. M., & Hammersley, M. (1994). Ethnography and participant observation. En *Handbook of qualitative research*, N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), (pp. 248-260). Thousand Oaks (CA) EEUU.

Ayllón, M. (2012). *Invención-resolución de problemas por alumnos de educación primaria.* Tesis doctoral. Universidad de Granada

Barrera, V. J., Castro, E. y Cañadas, M. C. (2009). Cuaderno de trabajo sobre razonamiento inductivo para profesores de primaria en formación. En *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación,* M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.). XIII Simposio de la SEIEM. Santander.

Battreal, V. M., Brewster, V., & Dixon, J. K. (2016). When the Answer Is the Question: Reflect and Discuss. *Teaching Children Mathematics, 23*(1), 30-37. https://doi.org/10.5951/teacchilmath.23.1.0030

Blanco, L. y Cárdenas, J. A. (2013). La resolución de problemas como contenido en el currículo de matemáticas de primaria y secundaria. *Campo Abierto. Revista de Educación, 32*(1), 137-156.

Bransford, J., & Stein, B. S. (1984). *The IDEAL problem solver: A guide for improving thinking, learning, and creativity.* New York: W. H. Freeman.

Bransford, J. D., Haynes, A. F., Stein, B. S., & Lin, X. (1998). *The IDEAL workplace: Strategies* *for improving learning, problem solving, and creativity.* Educational Resources Information Centre.

Brown, A. (1992). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *Journal of the Learning Sciences, 2,* 141-178. https://doi.org/10.1207/s15327809jls0202_2

Bruner, J. S. (1961). The Act of Discovery. *Harvard Educational Review, 31*, 21-32.

Bruner, J. S. y Linaza, J. L. (1984). *Acción, pensamiento y lenguaje.* Madrid: Alianza.

Callejo, M. L. (1994). *Un club matemático para la diversidad.* Madrid: Narcea Ediciones.

Castro-Martínez, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en españa. En *Investigación en educación matemática XII*, Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Chamorro, M. C. y Vecino, F. (2011). El tratamiento y la resolución de problemas. En *Didáctica de las matemáticas para primaria,* M. C. Chamorro (Ed.) (pp. 273-300). Madrid: Pearson Educación.

Clark, F. B., & Kamii, C. (1996). Identification of multiplicative thinking in children in grades 1-5. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(1), 41-51. https://doi.org/10.2307/749196

Claxton, G. (1995). *Vivir y aprender: psicologÃa del desarrollo y del cambio en la vida cotidiana.* Madrid: Alianza PsicologÃa.

Clements, M. A. (1980). Analyzing children's errors on written mathematical tasks. *Educational Studies in Mathematics, 11*(1), 1-21. https://doi.org/10.1007/BF00369157

Clements, M. A., & Ellerton, N. (1996). *The Newman Procedure for Analysing Errors on Written Mathematical Tasks.* Recuperado de http://compasstech.com.au/ARNOLD/PAGES/newman.htm

Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2010). Participating in Classroom Mathematical Practices. *The Journal of the Learning Sciences, 10*(1/2), 113-163.

Cockcroft, W. H. (1985). Las Matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia. https://sede.educacion.gob.es/publiventa/d/1129/19/0

Collins, A. (1992). Toward a design science of education. En *New directions in educational tech-*

nology, E. Scanlon, T. O'Shea (Eds.), (pp. 15-22). Berlín: Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-642-77750-9

Common Core State Standards Initiative (2010). Common Core State Standards for Mathematics (CCSSM). Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards.pdf

Confrey, J., & Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. En *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education.* A. E. Kelly &, R. A. Lesh (Eds.). Routledge Handbooks Online. https://doi.org/10.4324/9781410602725.ch10

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. En *The Cambrigde Handbook of Learning Sciences* R. K. Sawyer (Ed.), (pp. 135-152). New York: Cambridge University Press.

Contreras, J. (1994a). La investigación en la acción: ¿Qué es? *Cuadernos de Pedagogía, 224*, 8-12.

Contreras, J. (1994b). La investigación en la acción: ¿Cómo se hace? *Cuadernos de Pedagogía, 224*, 14-19.

Damasio, A. (2005). *En busca de Spinoza.* Madrid: Crítica.

De Bellis, V. A., & Goldin, G. A. (1997). The affective domain in mathematical problem-solving. En *Proceedings of the Twenty-first Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, E. Pekhonen, (Ed.), (pp. 209-216).

De Corte, E., Greer, B., & Verschaffel, L. (2000). *Making Sense of Word Problems.* CRC Press.

Demetriou, A. (2004). Mind, intelligence and development: A cognitive, differential and developmental theory of intelligence. En *Developmental change: Theories, models and measurement*, A. Demetriou & A. Raftopoulus (Eds.), (pp. 21-73). Cambridge, UK: Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511489938

Denzin, N. K. (1989). *The research act: A theoretical introduction to sociological methods*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (1994). Introduction: Entering the field of qualitative research. En *The SAGE Handbook of qualitative research*, N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), (pp. 1-17). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Dewey, J. (1910). *How we think.* Boston: D.C. Heath & Co. Publishers

Diseño Curricular Base. (1989). Educación primaria. *Ministerio de Educación y Ciencia.*

Durand, M., Hulme, C., Larkin, R., & Snowling, M. (2005). The cognitive foundations of reading and arithmetic skills in 7-to 10-year-olds. *Journal of experimental child psychology, 91*(2), 113-136. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2005.01.003

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. En *Proceedings of the 21st North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 3-26), Morelos, México.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics, 61*(1), 103-131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Elia, I., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 41*(5), 605-618. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0184-6

Fernández-Verdú C. y & Llinares, S. (2010). Relaciones entre el pensamiento aditivo y multiplicativo en estudiantes de educación primaria: el caso de la construcción de la idea de razón. *Horizontes educacionales, 15*(1), 11-22.

Fielding-Wells, J.,Dole, S., & Makar, K. (2014). Inquiry pedagogy to promote emerging proportional reasoning in primary students. *Mathematics Education Research Journal, 26*(1), 47-77. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0111-6

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for research in mathematics education, 16*(1), 3-17. https://doi.org/10.2307/748969

Font, C. M. (1995). Enseñar a conciencia. ¿Hacia una didáctica metacognitiva? *Aula de innovación educativa, 34*, 74-80.

Fuchs, L. S., Fuchs, D., Compton, D. L., Powell, S. R., Seethaler, P. M., Capizzi, A. M., Schatschneider, C., & Fletcher, J. M. (2006). The cognitive correlates of third-grade skill in arithmetic, algorithmic computation, and arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology, 98*(1), 29-43. https://doi.org/10.1037/0022-0663.98.1.29

Gagne, R. M. (1980). *The Conditions of Learning.* New York: Holt, Rinehart and Winston.

Galbraith, P. (1988). Mathematics education and the future: A long wave view of change. *For the Learning of Mathematics, 8*(3), 27-33.

Gálvez, G., Cosmelli, D., Cubillos, L., Leger, P., Mena, A., Tanter, É.,. . ., Soto-Andrade, J. (2011). Estrategias cognitivas para el cálculo mental. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 14*(1), 9-40.

García, V. A., Carmona, A. G. y Barrio, O. S. (1988). Estrategias operativas en la resolución de problemas matemáticos en el ciclo Medio de la EGB. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 6*(3), 251-264.

Garofalo, J., & Lester, F. (1985). Metacognition, Cognitive Monitoring, and Mathematical Performance. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(3), 163-176. doi:10.2307/748391

Gil, N., Blanco, L. J., & Guerrero, E. (2006). The affective domain in mathematics learning. *IEJME-Mathematics Education, 1*(1), 16-32.

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 137-165. https://doi.org/10.1016/S0364-0213(99)80056-1

Goleman, D. (1996). *Emotional intelligence: Why it can matter more than IQ.* New York: Bantam Books.

Gómez-Chacón, I. M. (1997). *Procesos de aprendizaje en matemáticas con poblaciones de fracaso escolar en contextos de exclusión social: Las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas.* Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid.

Gómez-Chacón, I. M. (1998). Una metodología cualitativa para el estudio de las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 16*(3), 431-450.

Gómez-Chacón, I. M. (2000). *Matemática emocional: los afectos en el aprendizaje matemático.* Madrid: Narcea Ediciones.

Gómez-Chacón, I. M. (2004). Emotion and affect in mathematical education exploring a theoretical framework of interpretation. En *Psychology of Mathematics Education Conference* (Vol. 28, No. 1, p. 1).

Gómez-Chacón, I. M. (2009). Actitudes matemáticas: propuestas para la transición del bachillerato a la universidad. *Educación matemática, 21*(3), 05-32.

Greer, B. (1994). Extending the meaning of multiplication and division. En *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*, G. Harley & J. Confrey (Eds.), (pp. 61-85). Albany: State University of New York Press.

Grouws, D. (1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Reston (VA): National Council of Teachers of Mathematics.

Grupo, C. (1987). *De 12 a 16. Un proyecto de curriculum de Matemáticas.* Grupo Cero. Valencia.

Guzmán, M. (1995). *Para pensar mejor: Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos.* Madrid: Pirámide.

Hadamard, J. (1945). *The Pshycology of Invention in the Mathematical Field.* New York: Dover Publications.

Harel, G., & and Confrey, J. (1994). *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics: Luce Irigaray and "the Greeks".* New York: SUNY Press.

Hart, K. M., Brown, M. L., Kuchemann, D. E., Kerslake, D., Ruddock, G., & McCartney, M. L. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16.* John Murray London.

Heppner, P. P., & Petersen, C. H. (1982). The development and implications of a personal problem-solving inventory. *Journal of counseling psychology, 29*(1), 66-75. https://doi.org/10.1037/0022-0167.29.1.66

Hernández, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2006). *Metodología de la Investigación.* Méjico: Mc Graw Hill.

Hernandez, R. y Gómez-Chacón, I. M. (1997). Las actitudes en educación matemática. Estrategias para el cambio. *UNO: Revista de Didáctica de las matemáticas, 13*, 41-61.

Hernández, J. y Socas, M. (1994). Modelos de competencia para la resolución de problemas basados en los sistemas de representación en matemáticas. *SUMA, 16*, 82-90.

Heyworth, R. M. (1999). Procedural and conceptual knowledge of expert and novice students for the solving of a basic problem in chemistry. *International Journal of Science Education, 21*(2), 195-211. https://doi.org/10.1080/095006999290787

Jonassen, D. H. (2000). Toward a design theory of problem solving. *Educational technology research and development, 48*(4), 63-85.

Jonassen, D. H. (2004). *Learning to solve problems: An instructional design guide.* San Francisco: John Wiley & Sons.

Kantowski, M. G. (1980). Some thoughts on teaching for problem solving. En *Problem solving in school mathematics*, S. Krulik & R. E. Reys (Eds.), (pp. 195-203).

Kelly, A. (2004). Design research in education: Yes, but is it methodological? *The journal of the learning sciences, 13*(1), 115-128.

Kelly, A. E., & Lesh, R.A. (2012). *Handbook of research design in mathematics and science education.* Londres: Routledge.

Kemmis, S., & McTaggart, R. (1982). *The action research planner.* Deakin University.

Kemmis, S. (1992). Mejorando la educación mediante IAP. En *La investigación-acción participativa: inicios y desarrollos*, M. C. Salazar (Ed.), (pp. 175-204). Editorial Popular.

Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past 25 years of research on teaching mathematical problem solving. En *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*, E.A. Silver (Ed.), (pp. 1-15). Rouledge Ed.

Kline, M. (1973). *Why Johnny can't add: the failure of the new math.* New York: St. Martin's Press.

Kouba, V. L. (1989). Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems. *Journal for research in Mathematics Education, 20*(2), 147-158. https://doi.org/10.2307/749279

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren.* Chicago: University of Chicago Press.

Lago, M. O., Rodríguez, P., Enesco, I. y Jiménez, L. (2008). Me sobran cuatro y no sé qué hacer con ellos. Un estudio sobre los problemas de división con resto en alumnos de 1º de ESO. *Anales de psicología, 24*(2), 201-212.

Landis, J. R., & Koch, G. G. (1977). An Application of Hierarchical Kappa-type Statistics in the Assessment of Majority Agreement among Multiple Observers. *Biometrics, 33*(2), 363-374.

Latorre, A. (2003). *Investigación acción.* Barcelonoa: Graó.

Lee, K. S. (1982). Fourth graders' heuristic problem-solving behavior. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*(2), 110-123. https://doi.org/10.2307/748358

Lester, F. K. (1989). Reflections about mathematical problem-solving research. *The teaching* *and assessing of mathematical problem solving, 3*, 115-124.

Lester F. K., & Garofalo, J. (1982). *Mathematical Problem Solving. Issues in Research.* Franklin Institute Press, 20th & Race Sts., Box 2266, Philadelphia, PA.

Lester, F. K., Garofalo, J. & Kroll, D. L. (1989). Self-confidence, interest, beliefs, and metacognition: Key influences on problem-solving behavior. En *Affect and Mathematical Problem Solving*, D. B. McLeod & V. M. Adams (Eds.), (pp. 75-88), Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3614-6_6

Lester, F. K., & Mau, S. T. (1993). Teaching mathematics via problem solving: A course for prospective elementary teachers. *For the learning of mathematics, 13*(2), 8-11.

Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U., & Bruder, R. (2016). Problem solving in mathematics education. ICME-13 Topical Surveys. Springer.

Lo, J. J. & Watanabe, T. (1997). Developing ratio and proportion schemes: A story of a fifth grader. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(2), 216-236. https://doi.org/10.2307/749762

Mandler, G. (1989a). Affect and learning: Causes and consequences of emotional interactions. En *Affect and mathematical problem solving,* D. B. McLeod & V. M. Adams (Eds.), (pp. 3-19). New York: Springer.

Mandler, G. (1989b). Affect and learning: Reflections and prospects. En *Affect and mathematical problem solving,* D. B. McLeod & V. M. Adams (Eds.), (pp. 237-244). New York: Springer.

Marshall, S. P. (1995). *Schemas in problem solving.* Cambridge University Press.

Martin, M. O., & Kelly, D. L. (1996). *Third International Mathematics and Science Study. Technical Report. Volume I: Design and Development.* Recuperado de https://timssandpirls.bc.edu/timss1995i/TechVol1.html

Martin, M. O., & Mullis, I. V. S. (2012). *Methods and procedures in TIMSS and PIRLS 2011.* Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College. Recuperado de 2015 de https://timssandpirls.bc.edu/methods/index.html

Martin, M. O., & Mullis, I. V. S. (2013). *TIMSS and PIRLS 2011: Relationships among Reading, Mathematics, and Science Achievement at the Fourth Grade–Implications for Early Learning.* Recuperado de
https://timssandpirls.bc.edu/timsspirls2011/international-database.html

Mason, J., Burton, L. y Stacey. K.(1998). *Pensar matemáticamente.* Barcelona: Centro de publicaciones del MEC y Editorial Labor.

Mayer, R. E. (1985). Mathematical ability. En *Human abilities: An information processing approach*, R. J. Sternberg (Ed.), (pp. 127-150). New York: W.H. Freeman.

Mayer, R. E., & Hegarty, M. (1996). The process of understanding mathematical problems. En *The studies in mathematical thinking and learning series. The nature of mathematical thinking*, R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.), (pp. 29-53). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Mayer, R. E. (1998). Cognitive, metacognitive, and motivational aspects of problem solving. *Instructional Science, 26*(1), 49-63. https://doi.org/10.1023/A:1003088013286

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, D. Grouws (Ed.), (pp. 575-596), New York: Macmillan.

McLeod, D. B. & McLeod, S. H. (2002). Synthesis-beliefs and mathematics education: Implications for learning, teaching, and research. *Mathematics Education Library*, *31*, 115-126. https://doi.org/10.1007/0-306-47958-3_7

McLeod D. B. (1989a) The Role of Affect in Mathematical Problem Solving. En *Affect and Mathematical Problem Solving*, D. B. McLeod & V. M. Adams (Eds.), (pp. 20-36), Springer-Verlag, New York.

McLeod, D. B., & and Adams, V. M. (1989b). *Affect and mathematical problem solving: A new perspective.* New York: Springer-Verlag.

Ministerio de Educación y Ciencia (1970, 6 de agosto). Ley General de Educación y Finaciamiento de la Reforma Educativa, 4 de agosto. BOE, 187, 12525-12546. https://www.boe.es/buscar/doc.php?id=BOE-A-1970-852

Ministerio de Educación y Ciencia (1990, 4 de octubre). LEY ORGÁNICA 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo. BOE, 238, 28927-28942. https://www.boe.es/diario_boe/txt.php?id=BOE-A-1990-24172

Ministerio de Educación y Ciencia (1991, 26 de julio). Real Decreto 1006/1991, de 14 de junio, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Primaria. BOE, 152, 21191-21193. https://www.boe.es/buscar/doc.php?id=BOE-A-1991-16421

Ministerio de Educación y Ciencia (2002, 24 de diciembre). LEY ORGÁNICA 10/2002, de 23 de diciembre, de Calidad de la Educación. BOE, 307, 45188-45220. https://www.boe.es/diario_boe/txt.php?id=BOE-A-2002-25037

Ministerio de Educación y Ciencia (2003, 3 de julio). Real Decreto 830/2003, de 2 de julio, por el que se establecen las enseñanzas comunes de la Educación Primaria. BOE, 157, https://www.boe.es/buscar/doc.php?id=BOE-A-1991-16421

Ministerio de Educación y Ciencia (2006, 4 de mayo). LEY ORGÁNICA 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. BOE, 106, 17158-17207. https://www.boe.es/buscar/doc.php?id=BOE-A-2006-7899

Ministerio de Educación y Ciencia (2013, 10 de diciembre). LEY ORGÁNICA 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. BOE, 295, 97858-97921. https://www.boe.es/buscar/doc.php?id=BOE-A-2013-12886

Ministerio de Educación y Ciencia (2014a, 1 de marzo). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por la que se establece el currículo básico de Educación Primaria. BOE, 52, 19349-19420. https://www.boe.es/buscar/doc.php?id=BOE-A-2014-2222

Molina, M. (2011). Integración del pensamiento algebraico en la educación básica. Un experimento de enseñanza con alumnos de 8-9 años. En *Ensino e Aprendizagem da Álgebra. Actas do Encontro de Investigacao em Educacao Matemática, EIEM 2011*, M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira y J. P. da Ponte (Eds.), (pp. 27-51). Póvoa do Varzim.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias, 29*(1), 75-88.

Monereo, C. (1995a). Estrategias para aprender a pensar bien. *Cuadernos de pedagogía, 237*, 8-14.

Monereo, C. (1995b). De los procedimientos a las estrategias: implicaciones para el Proyecto Curricular Investigación y Renovación (IRES). *Investigación en la Escuela, 27*, 21-38.

Muis, K. R. (2004). Personal epistemology and mathematics: A critical review and synthesis of research. *Review of educational research, 74*(3), 317-377.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Ruddock G. J., O'Sullivan C. Y., & Preuschoff C. (2009). *TIMSS 2011 Assessment Frameworks.* TIMSS & PIRLS International Study Center. Lynch School of

Education, Boston College.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Minnich, C. A., Stanco, G. M., Arora, A., Centurino, V. A. S., & Castle, C. E. (2012). *TIMSS 2011 Encyclopedia: Education Policy and Curriculum in Mathematics and Science, Volumes 1 and 2.* Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.

Murnane, R. J., Levy, F., & Autor, D. (1999). Technological change, computers and skill demands: Evidence from the back office operations of a large bank. En *Economic Research Labor Workshop. The Irish Journal of Management, 79*.

National Council of Teachers of Mathematics.(1980). *An agenda for action: Recommendations for school mathematics of the 1980s.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standars for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics.(2006). *Curriculum Focal Points for Kindergarten through Grade 8 mathematics: A quest for coherence.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Nesher, P., Greeno, J. G., & Riley, M. S. (1982). The development of semantic categories for addition and subtraction. *Educational Studies in Mathematics, 13*(4), 373-394. https://doi.org/10.1007/BF00366618

Nesher, P., & Hershkovitz, S. (1994). The role of schemes in two-step problems: Analysis and research findings. *Educational Studies in mathematics, 26*(1), 1-23. https://doi.org/10.1007/BF01273298

Newell, A., & Simon, H. A. (1972). *Human problem solving.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Newman, M. A. (1997). An analysis of sixth-grade pupils' errors on written mathematical tasks. *Victorian Institute for Educational Research Bulletin, 39*, 31-43.

Newman, M. A. (1983). *Strategies for diagnosis and remediation.* San Diego: Harcourt Brace Jovanovich.

Nunokawa, K. (1994). Improving diagrams gradually: One approach to using diagrams in problem solving. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 34-38.

Palm, T. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 67*(1), 37-58. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9083-3

Pehkonen, E., & Törner, G. (1996). Mathematical beliefs and different aspects of their meaning. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 28*(4), 101-108.

Pehkonen, E., Näveri, L. & Laine, A. (2013). On teaching problem solving in school mathematics. *CEPS Journal: Center for Educational Policy Studies Journal, 3*(4), 9-23.

Pesek, D. & Kirshner, D. (2000). Interference of instrumental instruction in subsequent relational learning. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(5), 524-540.

Pólya, G. (1963) On learning, teaching, and learning teaching. *The American Mathematical Monthly, 70*(6), 605-619. https://doi.org/10.2307/2311629

Pólya, G. (1965). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving.* John Wiley & Sons.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas.* Granada: Comares.

Puig, L. (2008). Presencia y ausencia de la resolución de problemas en la investigación y el currículo. En *Investigación en educación matemática XII*, R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), (pp. 93-112). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Radatz, H. (1980). Students' errors in the mathematical learning process: a survey. *For the learning of Mathematics, 1*(1), 16-20.

Ramos, P. (2015). *Más ideas, menos cuentas. Cuaderno de ejercicios.* Pamplona: Polygon Education.

Rinaudo, M. C. y Donolo, D. (2010). Estudios de diseño. Una perspectiva prometedora en la investigación educativa. *Revista de educación a distancia, 22*. http://revistas.um.es/red/article/view/111631

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia*, J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (Eds.), (pp. 69-108). Bogotá: una empresa docente.

Rodríguez, P., Lago, M. O., Hernández, M. L., Jiménez, L., Guerrero, S., & Caballero, S. (2009).

How do secondary students approach different types of division with remainder situations? Some evidence from Spain. *European journal of psychology of education, 24*(4), 529-543. https://doi.org/10.1007/BF03178766

Salovey, P. & Mayer, J. D. (1990). Emotional intelligence. *Imagination, cognition and personality, 9*(3), 185-211. https://doi.org/10.2190/DUGG-P24E-52WK-6CDG

Schoenfeld, A. H. (1983). Beyond the purely cognitive: Belief systems, social cognitions, and metacognitions as driving forces in intellectual performance. *Cognitive science, 7*(4), 329-363. https://doi.org/10.1207/s15516709cog0704_3

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* New York: Accademic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, D. Grouws (Ed.), (pp. 334-370). New York: Macmillan.

Schoenfeld, A. H. (2007). Problem solving in the United States, 1970–2008: research and theory, practice and politics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 39*(5-6), 537-551. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0038-z

Schoenfeld, A. H. (2013). Classroom observations in theory and practice. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 45*(4), 607-621. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0483-1

Schroeder, T. L., & Lester, F. K. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. En *New directions for elementary school mathematics*, P. R. Trafton, & A. P. Shulte (Eds.). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2004). Development of Numerical Estimation in Young Children. *Child Development, 75*(2), 428-444. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2004.00684.x

Silver, R. L., Wortman, C. B., & Klos, D. S. (1982). Cognitions, affect, and behavior following uncontrollable outcomes: A response to current human helplessness research. *Journal of Personality, 50*(4), 480-514. doi:10.1111/j.1467-6494.1982.tb00230.x

Silver, E. A., Shapiro, L. J., & Deutsch, A. (1993). Sense making and the solution of division problems involving remainders: An examination of middle school students' solution processes and their interpretations of solutions. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(2), 117-135. https://doi.org/10.2307/749216

Simon, H. A. (1996). *The sciences of the artificial.* Boston: MIT Press.

Stacey, K., Burton, L., & Mason, J. (1982). *Thinking mathematically.* New York: Addison-Wesley.

Stanic, G. & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. *The teaching and assessing of mathematical problem solving, 3*, 1-22.

Steffe, L. P. & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En *Handbook of research design in mathematics and science education*, R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), (pp. 267-307). Routledge Handbooks Online.

Teong, S. K., Hedberg, J. G., Ho, K. F., Lioe, L. T., Tiong, J. Y. S., Wong, K. Y., & Fang, Y. (2009). *Developing the repertoire of heuristics for mathematical problem solving, project 1: Establishing baseline data for mathematical problem solving practices in Singapore schools.* Technical Report NIE. Recuperado de http://hdl.handle.net/10497/4151

The Design-Based Research Collective. (2003) Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher, 32*(1), 5-8. https://doi.org/10.3102/0013189X032001005

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. En *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*, D. A. Grouws (Ed.), (pp. 127-146). New York: Macmillan.

Tomás i Folch M. (1990). Los problemas aritméticos de la enseñanza primaria. Estudio de dificultades y propuesta didáctica. *Revista Educar, 17*, 119-140.

Toom, A. (2005). *Word problems in Russia and America.* Recuperado de http://www.de.ufpe.br/~toom/travel/sweden05/WP-SWEDEN-NEW.pdf

Trillo Alonso, J. F. y Plata Casáis, A. (2001) ¿Qué modelos de enseñanza-aprendizaje adoptan los profesores de secundaria de matemáticas? o, cómo los profesores han seguido haciendo lo de siempre pese a la reforma. *Enseñanza & Teaching: Revista interuniversitaria de didáctica, 19*, 307-324.

Van Dooren, W., De Bock, D., Gillard, E., & Verschaffel, L. (2009). Add? Or multiply? A study on the development of primary school students' proportional reasoning skills. En *Search for Theories in Mathematics Education (5)*, (pp. 281-288). Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Van Meter, P. (2001). Drawing construction as a strategy for learning from text. *Journal of educational psychology, 93*(1), 129-140. http://doi.org/10.1037/0022-0663.93.1.129

Verschaffel, L., De Corte, E., Lasure, S., Van Vaerenbergh, G., Bogaerts, H., & Ratinckx, E. (1999). Learning to solve mathematical application problems: A design experiment with fifth graders. *Mathematical thinking and learning, 1*(3), 195-229. http://doi.org/10.1207/s15327833mtl0103_2

Verstappen, P. F. L. (1988). The pupil as a problem-solver. En *Foundation and Methodology of the discipline mathematics education*, H. G. Steiner, & A. Vermandel (Eds).

Vicente, S., Orrantia, J. y Verschaffel, L. (2008). Influencia del conocimiento matemático y situacional en la resolución de problemas aritméticos verbales: ayudas textuales y gráficas. *Infancia y Aprendizaje, 31*(4), 463-483.

Vila, A. y Callejo, M. L. (2009). *Matemática para aprender a pensar.* São Paulo: Artmed Editora.

Voskoglou, M. G. (2012). Recent Research Advances In Problem-Solving. *International Journal of Mathematics, Game Theory, and Algebra, 21*(2-3), 181-198.

Watson, I. (1980). Investigating errors of beginning mathematicians. *Educational Studies in Mathematics, 11*(3), 319-329. https://doi.org/10.1007/BF00697743

Watson, C. S., Kidd, G. R., Horner, D. G., Connell, P. J., Lowther, A., Eddins, D. A., . . . Gospel, M. D. (2003). Sensory, cognitive, and linguistic factors in the early academic performance of elementary school children: The benton-iu project. *Journal of Learning Disabilities, 36*(2), 165-197. https://doi.org/10.1177/002221940303600209

Webb, N. M., Franke, M. L., Ing, M., Wong, J., Fernandez, C. H., Shin, N., & Turrou, A. C. (2014). Engaging with others' mathematical ideas: Interrelationships among student participation, teachers' instructional practices, and learning. *International Journal of Educational Research, 63*, 79-93. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2013.02.001

White, A. L. (2010). Numeracy, literacy and Newman's error analysis. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia, 33*(2), 129-148.

Wijaya, A. van den Heuvel-Panhuizen M., Doorman, M., & Robitzsch, A. (2014). Difficulties in solving context-based PISA mathematics tasks: An analysis of students' errors. *The Mathematics Enthusiast, 11*(3), 555-584.

Yancey, A. V., Thompson, C. S., & Yancey, J. S. (1989). Children must learn to draw diagrams. *The Arithmetic Teacher, 36*(7), 15-19.